

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física del Aire y Geofísica



TESIS DOCTORAL

Atenuación de ondas sísmicas internas en el manto

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Félix Javier Gutiérrez García

Madrid, 2015

Felix Javier Gutiérrez García

TP
1981
090



x-53 031032-2

ATENUACION DE ONDAS SISMICAS INTERNAS EN EL MANTO

Departamento de Física del Aire y Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid
1981



BIBLIOTECA

© Félix Javier Gutiérrez García
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-10215-1981

**ATENUACION DE ONDAS SISMICAS INTERNAS
EN EL MANTO**

**Memoria presentada por
Félix Javier Gutiérrez García
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas**

Director : Prof. Dr. Agustín Udías Vallina

Curso 1979-80

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer, en primer lugar y muy especialmente, al Dr. Agustín Udías su constante ayuda, consejo y ánimo, sin los que no hubiera podido finalizar este trabajo.

También debo expresar mi gratitud al Prof. Takeshi Mikumo por la ayuda prestada en la primera fase de esta memoria y al Dr. Miguel Moreno de la Facultad de Física de Santander por sus observaciones en cuestiones de Física del Estado Sólido. Al referirme a este campo de la Física deseo indicar mi agradecimiento al Prof. Antonio Bernalte a quien debo todo el interés que siento por los temas que se tratan en la segunda parte de este trabajo.

Agradezco, por último, a mi esposa y padres la ayuda y ánimos prestados en todo momento.

I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION	1
 1. ELASTICIDAD Y ANELASTICIDAD DE LOS SOLIDOS	
1.1 Elasticidad	5
1.2 Teoría formal de la anelasticidad	8
1.3 Aspectos formales del tratamiento de la anelasticidad en la Sismología	12
 2. ANELASTICIDAD DE LA TIERRA	
2.1 Introducción	16
2.2 Determinación de Q^{-1} mediante ondas sísmicas internas.	18
2.3 Atenuación en la Corteza	21
2.4 Atenuación de ondas internas en el Manto Superior	22
2.5 Atenuación de ondas internas en el Manto Inferior	25
 3. DETERMINACION DE LA FUNCION DE DISIPACION ESPECIFICA MEDIA Q_{α}^{-1} , COMO FUNCION DE LA DISTANCIA EPICENTRAL	
3.1 Introducción	28
3.2 Método de análisis	30
3.3 Análisis de datos	33
3.3.1 Datos empleados	33
3.3.2 Análisis espectral	34
3.3.3 Respuesta instrumental	38
3.4 Cálculo de Q_{α}^{-1} a distintas distancias epicentrales ...	39\
3.4.1 Método de resolución	39
3.4.2 Resultados obtenidos	43

Página

4. DISTRIBUCION DE Q_α CON LA PROFUNDIDAD EN EL MANTO

4.1 Introduccion	51
4.2 Método de cálculo empleado ...	53
4.3 División de la Corteza y Manto en regiones	54
4.4 Recorrido de las ondas P	58
4.5 Cálculo de los tiempos de permanencia en cada región.	61
4.5.1 Integración por Gauss	62
4.5.2 Análisis de errores	63
4.5.3 Programa GAUSS	66
4.6 Cálculo de la distribución de Q_α en el Manto	72
4.6.1 Procedimiento empleado	72
4.6.2 Resultados	74
4.7 Comparación con otros modelos	84
4.7.1 Modelos basados en ondas internas	84
4.7.2 Modelos obtenidos a partir de ondas superficiales	90
4.7.3 Disipación en la frontera Manto Inferior-Núcleo .	92
4.8 Consideraciones finales	93

5. MECANISMOS DE ANELASTICIDAD EN LA TIERRA

5.1 Introduccion	96
5.2 Fricción interna debida a interacciones elementales .	98
5.3 Fricción interna debida a efectos mecánicos de rozamiento	99
5.4 Fricción interna debida a termoelasticidad	100
5.5 Fricción interna debida a dislocaciones	101
5.5.1 Histéresis	101
5.5.2 Resonancia	103
5.5.3 Relajación	103
5.5.4 Resumen	104
5.6 Fricción interna debida a difusión	105
5.7 Fricción interna en fronteras de grano	107

	<u>Página</u>
5.8 Fricción interna causada por fusión parcial	109
5.9 Fricción interna térmicamente activada	110
5.10 Resumen	111
6. UN POSIBLE MECANISMO DE ANELASTICIDAD DEBIDO A DEFECTOS PUNTUALES	
6.1 Introduucción	113
6.2 Defectos puntuales en los sólidos	113
6.2.1 Vacantes	114
6.2.2 Defectos intersticiales e impurezas substitucionales	117
6.3 Mecanismo de atenuación por creación de defectos puntuales	118
6.4 Posibles interacciones de este mecanismo con otros basados en dislocaciones	126
7. VARIACION DE LA FRICCION INTERNA DEBIDA AL MECANISMO PROPUESTO, EN EL INTERIOR DEL MANTO	
7.1 Fricción interna en un Manto homogéneo.....	128
7.2 Distribución de Q^{-1} con el mecanismo propuesto	131
7.2.1 Variación de Q^{-1} con la energía de formación de vacantes y defectos intersticiales	134
7.2.2 Variación de Q^{-1} con el volumen de activación, V^*	137
7.2.3 Variación de Q^{-1} con la temperatura	139
7.3 Acuerdo del modelo teórico con resultados experimentales	141
8. INCLUSION DE PROCESOS DISIPATIVOS EN LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO	
8.1 Introducción	145

	<u>Página</u>
8.2 Función disipativa	146
8.3 Tensiones disipativas o viscosas	150
8.4 Ecuaciones del movimiento en un medio disipativo	153
9. RESUMEN Y CONCLUSIONES	159
APENDICE A. Listados de los módulos fuente de los programas SYSTEQ2Q, SYSTEQIN y SIMPQIN	166
APENDICE B. Sobre el cálculo de la energía de formación de vacantes en la estructura iónica del ClNa	176
BIBLIOGRAFIA	183

I N T R O D U C C I O N

La Sismología proporciona los instrumentos más poderosos para el estudio del interior de la Tierra. De las llegadas de las ondas internas, obtenemos un modelo para la distribución de velocidades de las ondas P y S. Si añadimos los datos obtenidos de las oscilaciones libres y de la dispersión de las ondas superficiales, se consigue finalmente una descripción bastante completa de las propiedades elásticas de la Tierra y de sus variaciones radiales y laterales. Los modelos obtenidos representan no obstante, una idealización de la estructura del interior terrestre; pues en ellos se supone válida la teoría de la elasticidad perfecta.

Debido a que la Tierra no es perfectamente elástica, las ondas sísmicas y las oscilaciones libres se amortiguan y para explicar este comportamiento no elástico se hace necesario definir una nueva función Q^{-1} , que recibe el nombre de función de disipación específica - fricción interna según otros autores -, que da cuenta de esa anelasticidad y se define a partir de la energía disipada por periodo de la onda considerada. Esta nueva cantidad observable mediante experimentos adecuados está íntimamente ligada al estado físico - químico de la Tierra y muy probablemente depende fuertemente de la temperatura, por lo que su determinación constituye un nuevo instrumento para conocer otras propiedades complementarias de las elásticas.

La intención de esta memoria es el estudio de la distribución de Q_{α}^{-1} en el interior del Manto, obtenida a partir de ondas longitudinales P, así como de los posibles mecanismos que puedan dar lugar a esa anelasticidad, en materiales en las condiciones de presión y temperatura del Manto y para las frecuencias sísmicas.

En el capítulo 1, se ve la aparición del concepto de anelasticidad en la teoría clásica de la elasticidad al modificar la relación

esfuerzo - deformación considerando la dependencia explícita respecto del tiempo de estas magnitudes.

A continuación, en el capítulo 2, se revisan los resultados obtenidos para Q^{-1} y su distribución con la profundidad en el Manto, por diversos autores a partir del análisis de ondas sísmicas internas. Pese a la dispersión considerable de los valores numéricos calculados, los modelos de distribución poseen algunas características comunes, como son el considerar al Manto Superior como responsable de la mayor parte de la atenuación observada en todo el Manto, o la certeza casi absoluta de que Q_a^{-1} y Q_p^{-1} son del mismo orden en él. Estas propiedades de la anelasticidad del Manto, admitidas de modo general por todos los Sismólogos, conforman las bases que sirven para contrastar la validez de otros posibles modelos que se propongan.

Los capítulos 3 y 4, contienen el método de cálculo de una posible estructura disipativa del Manto para la energía de las ondas P y el modelo final obtenido. El método de cálculo es de tipo algorítmico a diferencia de muchos anteriores que resuelven el problema de la inversión de Q_a^{-1} (determinación de la distribución intrínseca de Q_a^{-1} a partir de los datos en la superficie), de un modo heurístico. El modelo que resulta es, como todos los obtenidos a partir de ondas internas, susceptible de un refinamiento de detalle, y consiste en los valores probables de Q_a^{-1} junto con sus desviaciones típicas, en un número pequeño de zonas significativas del Manto (tal como señala Smith (1.972), con las incertidumbres de los datos que se obtienen, solo está justificada una inversión que conduzca a un modelo poco detallado). Se realiza también una comparación con otros modelos preexistentes y una discusión de posibles mejoras del método.

La Física del Estado Sólido estudia diversos mecanismos fundamentales de disipación de energía elástica en los cristales. En el capítulo 5 se consideran varios de estos mecanismos y su posible validez

en la Tierra, teniendo en cuenta los datos experimentales de los capítulos 2, 3 y 4 y las condiciones de presión, temperatura y rango de frecuencias del fenómeno estudiado.

De estos mecanismos hay uno, térmicamente activado, que aparece experimentalmente en trabajos de laboratorio. En el capítulo 6 y a partir de considerables simplificaciones, se propone un mecanismo de origen atómico que puede explicar ese comportamiento.

La posible validez del mecanismo propuesto en el interior del Manto se discute en el capítulo 7. Para ello se comparan los resultados experimentales con el modelo de distribución de \bar{Q}_a^{-1} semicuantitativo, que se obtiene del mecanismo teórico cuando se supone el Manto homogéneo respecto al proceso causante de la disipación de energía. El acuerdo es aceptable para valores plausibles de energías y volúmenes de activación del proceso .

Al estudiar los mecanismos responsables de la anelasticidad de la Tierra, nos encontramos con un problema fundamental : no podemos reproducir en el laboratorio las condiciones de su interior y no conocemos exactamente los materiales con que tratamos ni la fase en que se encuentran. En muchos problemas de este tipo, un análisis riguroso no nos lleva muy lejos y para contestar las numerosas interrogantes que surgen, debemos hacer hipótesis basadas en intuiciones. Nuestra tarea, tal como señala Stacey(1.969), es separar las plausibles de las improbables y conseguir algún método para distinguir estas últimas. Argumentos basados en órdenes de magnitud juegan un papel decisivo permitiendo, en el caso de la anelasticidad de la Tierra, delimitar el número y orden de causas posibles mediante los valores que pueden adquirir las energías y volúmenes de activación de los procesos que se consideran. Este ha sido el camino seguido en los capítulos 5,6 y 7, sobre mecanismos de anelasticidad y la posible validez del que se propone.

El capítulo 8, finalmente, establece la conexión entre las dos partes de que consta éste trabajo, al introducir procesos atómicos que producen anelasticidad, en las ecuaciones del movimiento para el medio disipativo. Se relaciona así, el tratamiento mas fundamental de los mecanismos físicos de la segunda parte, con el mas formal utilizado por la Sismología y con el que se comienza ésta memoria.

C A P I T U L O 1

ELASTICIDAD Y ANELASTICIDAD EN LOS SOLIDOS

1.1.- ELASTICIDAD

La teoría moderna de la elasticidad, pese a una aparente complicación, se fundamenta y construye sobre dos leyes:

1.- La ley de Hooke: en un sólido elástico, la deformación en cada instante es proporcional a la tensión aplicada $F = M D$, recibiendo M el nombre de módulo elástico.

2.- La segunda ley de Newton

Tal como fué formulada originalmente, la ley de Hooke solo es aplicable a fuerzas cuasiestáticas, es decir aplicadas muy lentamente. Esto es evidente si tenemos en cuenta que, en la ley de Hooke, la deformación D se ve influida por las distorsiones que se operan en todo el sólido. Por tanto, no puede alcanzar el valor asociado a la fuerza aplicada hasta que cada parte del cuerpo sea "notificada" de la fuerza F y tengan lugar las distorsiones correspondientes. Transcurre pues, un intervalo de tiempo entre la aplicación de una fuerza y la obtención de una deformación. Para que ambas puedan estar relacionadas según la ley de Hooke, la fuerza no debe haber cambiado en ese intervalo (fuerza cuasiestática).

Esta restricción de la ley de Hooke se elimina considerando el cuerpo descompuesto en un gran número de regiones elementales de extensión muy pequeña. La distorsión en cada región viene determinada por las fuerzas que ejercen sobre ella las regiones vecinas, independientemente de la rapidez con que cambia. Esto es así porque consideramos regiones tan pequeñas, que el periodo de las fuerzas aplicadas, es mucho mayor que el propio de vibración de estas regiones (periodo de vibración molecular). Así pues, el cambio de las fuerzas en esos

intervalos es despreciable.

El cambio en la forma de las regiones elementales puede describirse mediante un vector de desplazamiento \vec{u} , que se define de tal modo que si una región tenía antes de la deformación, un radio vector \vec{r} , después de ella, pasa a $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}$. A partir de las componentes de \vec{u} , se define el "tensor de deformaciones" $\vec{\epsilon}$, siendo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La ley de Hooke generalizada, relaciona las componentes del tensor de deformaciones, con la densidad superficial de las componentes de las fuerzas sobre tres planos fundamentales o "tensor de tensiones o esfuerzos" \vec{T} , siendo T_{ij} la j-esima componente de la fuerza sobre la unidad de superficie perpendicular al eje x_i .

La relación más general entre ambos tensores, para un sólido anisótropo (por ejemplo un cristal), es

$$\begin{aligned} T_{ik} &= S_{iklm} \epsilon_{lm} \\ \epsilon_{ik} &= C_{iklm} T_{lm} \end{aligned} \quad (1-1)$$

donde S_{iklm} es el tensor de módulos de elasticidad, y C_{iklm} es el tensor de constantes elásticas, que cumplen

$$S_{iklm} = S_{kilm} = S_{ikml} = S_{lmik}$$

y análogamente:

$$C_{iklm} = C_{kilm} = C_{ikml} = C_{lmik}$$

Con estas condiciones, los tensores tienen 21 componentes distintas. Puede comprobarse que la existencia de simetrías en un cristal, reduce el número de componentes diferentes. Para un estudio detallado de este tema pueden consultarse los libros clásicos de Teoría de Elasticidad (Love, 1944; Landau y Lifshitz, 1969) y el de Nye (1957).

Para el caso más simple de un sólido perfectamente elástico e isotrópico, que en primera aproximación es válido para la Tierra; el nú-

mero de módulos elásticos queda reducido a dos

K : módulo de compresibilidad

μ : módulo de rigidez

y las relaciones (1 - 1) son ahora:

$$\begin{aligned} \tau_{ii} &= 3 K \epsilon_{ii} \quad , \text{ suma en índices repetidos.} \\ \tau'_{ik} &= 2 \mu \epsilon'_{ik} \quad , \quad i \neq k \end{aligned} \quad (1-2)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau'_{ik} &= \tau_{ik} - \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ik} && : \text{esfuerzo desviatorio} \\ \epsilon'_{ik} &= \epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \epsilon_{ii} \delta_{ik} && : \text{deformación de corte} \end{aligned}$$

La teoría de la elasticidad, obtenida esencialmente de las consecuencias que surgen de la aplicación de la ley de Hooke a regiones elementales, no se puede aplicar estrictamente a sólidos reales.

La elasticidad perfecta supone que la deformación es únicamente función univaluada del esfuerzo. Ya en 1825, Weber encontró en sus investigaciones sobre galvanómetros, pequeñas desviaciones de la elasticidad perfecta. Progresivamente se fueron hallando otros efectos contrarios a la teoría de la elasticidad perfecta, como el "efecto elástico posterior" de Anerbach, en 1891, que se refiere al acercamiento progresivo y asintótico de la deformación elástica a su valor de equilibrio, con el transcurso del tiempo, después de haberse aplicado una tensión. En estructuras sujetas a cargas cíclicas o vibraciones, el retraso de la deformación respecto al esfuerzo causaba una disipación de energía.

Todos estos efectos, son manifestación de la falta de unicidad en la relación entre esfuerzos y deformaciones, y se manifiestan mediante una pérdida de energía elástica y variación de los módulos elásticos.

Si tenemos en cuenta, que en todos los sólidos reales se produ-

cen estos efectos, habrá que plantearse su estudio de un modo riguroso. No obstante, el valor e importancia de la teoría clásica de la elasticidad, es que explica el comportamiento de los sólidos bajo tensiones con suficiente aproximación, en la mayoría de los casos de interés práctico.

1.2.- TEORIA FORMAL DE LA ANELASTICIDAD

En la discusión de las propiedades elásticas de los sólidos, está implícita la suposición de que la deformación es únicamente función del esfuerzo aplicado. Esto se ha visto que no es cierto para sólidos reales, ya que existe un retraso entre esfuerzo y deformaciones.

Como se estudiará más detenidamente en el capítulo 5, hay procesos como la difusión de átomos, defectos y energía térmica del sólido que son funciones del tiempo. Como resultado de ellos, la deformación elástica depende no solo del esfuerzo, sino también del tiempo (1).

Esta dependencia de la deformación respecto del esfuerzo y del tiempo se conoce como efecto anelástico o anelasticidad.

Los primeros intentos de generalización de la teoría de la elasticidad, realizados por Meyer y Voight, consistían en considerar las tensiones como funciones de las deformaciones y las variaciones de estas con el tiempo. Para el caso más simple, la relación es:

$$\tau = \alpha \epsilon + \beta \dot{\epsilon} \quad (1-3)$$

Los sólidos que obedecen a esta ecuación, se conocen como "Sólidos de Voight". En la figura (1-1-a), puede verse el modelo mecánico que

(1) Los procesos atómicos influyen en el comportamiento elástico del sólido, cuya explicación fundamental se basa en la estructura discreta y en el tipo de enlace atómico (ver libro de Born y Huang, 1954; capítulo 3). La teoría de la elasticidad estudia las propiedades del cristal considerado como un medio continuo, no como una red periódica de átomos. Esta aproximación es válida para vibraciones de longitud de onda mucho mayor que el espaciado reticular (La transición del caso discontinuo al continuo puede verse en el capítulo 3 de Elliot, 1974).

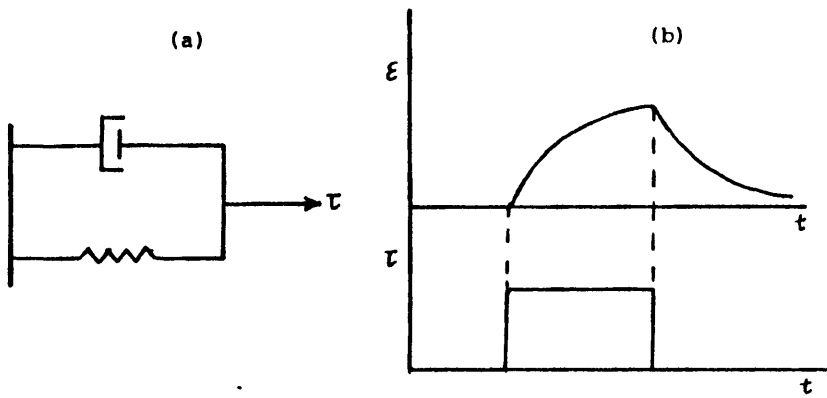


Figura 1-1. Modelo mecánico del Sólido de Voight

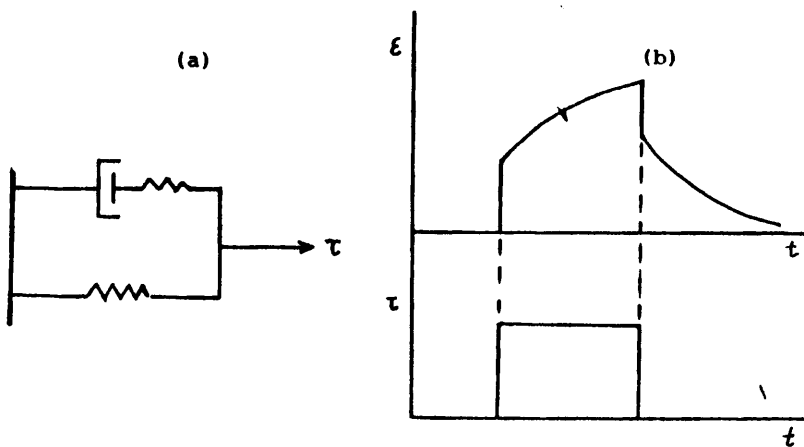


Figura 1-2. Modelo mecánico del "Sólido Lineal Standard".

representa este tipo de sólido y en la figura 1-1b, la gráfica de deformaciones y tensiones que manifiesta la existencia de una dependencia respecto del tiempo. Así, cuando se aplica una tensión al sólido de Voight, la deformación no alcanza su valor de equilibrio de un modo instantáneo sino asintóticamente. Análogamente, la deformación desaparece de modo gradual, una vez retirada la tensión.

La energía disipada en este sólido es proporcional a la frecuencia (Howell, 1963)

$$\Delta E = \int_0^T \tau \frac{d\varepsilon}{dt} dt = 2\pi e_0 \nu$$

Una generalización de este modelo, es la que se muestra en la figura 1-2a. Este sistema tiene un desplazamiento instantáneo cuando se le aplica una tensión. De igual modo, cuando quitamos la tensión, el cuerpo recupera instantáneamente parte de su deformación como puede observarse en la figura 1-2b. Este modelo manifiesta los rasgos generales de la elasticidad retardada de los sólidos. La ecuación para este sistema mecánico es:

$$a_1 \tau + a_2 \dot{\tau} = b_1 \varepsilon + b_2 \dot{\varepsilon} \quad (1-4)$$

que es la relación más general entre esfuerzos, deformaciones y sus derivadas. Un sólido que obedece (1-4), recibe el nombre de "Sólido lineal standard".

En la ecuación (1-4) hay tres constantes independientes, que en el caso más general serán tensoriales, por ejemplo: a_2/a_1 , b_1/a_1 , y b_2/a_1 . Para facilitar la comprensión del sólido lineal standard se introducen tres constantes independientes: t_ε , t_τ , y M_κ como sigue

$$\tau + t_\varepsilon \dot{\tau} = M_\kappa (\varepsilon + t_\tau \dot{\varepsilon}) \quad (1-5)$$

en donde, como puede verse fácilmente, t_ε representa el tiempo de relajación de tensiones para una deformación ε , fija; t_τ representa el tiempo de relajación de deformaciones para tensiones τ , fijas; M_κ , módulo elástico relajado, representa la relación entre τ y ε cuando

el tiempo tiende a infinito.

Las soluciones de (1-5) son:

$$\begin{aligned}\tau(t) &= M_R \epsilon_0 + (\tau_0 - M_R \epsilon_0) e^{-t/t_e} \\ \epsilon(t) &= M_R^{-1} \tau_0 + (\epsilon_0 - M_R^{-1} \tau_0) e^{-t/t_\tau}\end{aligned}$$

A partir de estas constantes, se define un nuevo módulo $M_U = \frac{t_\tau}{t_e} M_R$: Módulo elástico no relajado, que representa la relación entre $\Delta \tau$ y $\Delta \epsilon$, cuando los cambios son tan rápidos que no hay tiempo para ninguna relajación.

Para estudiar los sólidos, se emplean generalmente métodos dinámicos, con variaciones periódicas de tensiones y deformaciones, como es el caso de las ondas sísmicas. Con $\tau = \tau_0 e^{i\omega t}$ y $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ en (1-5) se obtiene:

$$(1 + i\omega t_e) \tau_0 = M_R (1 + i\omega t_\tau) \epsilon_0$$

Las amplitudes de tensiones y deformaciones se hallan relacionadas mediante un módulo complejo

$$\mathcal{M} = \frac{1 + i\omega t_\tau}{1 + i\omega t_e} M_R \quad (1-6)$$

El ángulo δ , de desfase entre tensiones y deformaciones, se utiliza comúnmente como medida de la anelasticidad

$$\tan \delta = \frac{\text{Im } \mathcal{M}}{\text{Re } \mathcal{M}} = \frac{M_U - M_R}{\sqrt{M_U M_R}} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = \Delta_0 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (1-7)$$

donde $\tau = \sqrt{t_\tau t_e}$ y Δ_0 , reciben el nombre de tiempo e intensidad de relajación respectivamente. El desfase máximo se produce para $\omega = 1/\tau$ y $(\tan \delta)_{\max} = \frac{1}{2} \Delta_0$. Se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}| &= M_R & \text{si } \omega \ll 1/\tau & \text{(bajas frecuencias)} \\ |\mathcal{M}| &= t_\tau/t_e M_R & \text{para } \omega \gg 1/\tau & \text{(altas frecuencias)}\end{aligned}$$

Para un estudio detallado de esta teoría formal, se puede consultar el libro de Zener (1948).

En la literatura de Física del Estado Sólido, Metalurgia y Geofísica, se emplea frecuentemente el término de Fricción Interna para referirse al conjunto de procesos que conducen a la atenuación o disipación de energía acústica, ultrasónica o sísmica.

En el caso de suponer una fuerza restauradora proporcional a la amplitud de vibración, y una fuerza disipativa proporcional a la velocidad, la razón de amplitudes de dos oscilaciones sucesivas es constante y el logaritmo neperiano de la razón A , decremento logarítmico, se toma como medida de la fricción interna. Otra medida indirecta viene dada por la anchura de la curva de resonancia de una oscilación forzada. Cuando las amplitudes de dichas vibraciones se dibujan como función de la frecuencia, la curva presenta un máximo a la frecuencia de resonancia ω_r ; si $\Delta\omega$ es la anchura a mitad de la altura del pico de resonancia, $\Delta\omega/\omega_r$ nos mide la fricción interna. En teoría de circuitos eléctricos este valor viene definido por $1/Q$, siendo Q el factor de calidad.

Estas expresiones comunes de la fricción interna, están relacionadas del siguiente modo (Anderson, 1967):

$$\operatorname{sen} \delta \approx \tan \delta \approx \delta = \frac{\Delta E}{2\pi E} = Q^{-1} = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\operatorname{Im} \mathcal{M}}{\operatorname{Re} \mathcal{M}} \quad (1-8)$$

ΔE , es la energía disipada por ciclo de tensiones en la unidad de volumen y E , la energía almacenada en dicha unidad de volumen, cuando la tensión es máxima.

1.3.- ASPECTOS FORMALES DEL TRATAMIENTO DE LA ANELASTICIDAD EN LA SISMOLOGIA

Para terminar el capítulo, parece conveniente señalar algunas particularidades que presenta el tratamiento de la anelasticidad en los trabajos de Sismología.

El modelo mas apropiado para aplicaciones sismológicas, es el

que tiene en cuenta la existencia de procesos disipativos de energía, introduciendo módulos elásticos complejos y frecuencias también complejas. Así se toman unos módulos de compresibilidad $K' = K + iK''$, de rigidez $\mu' = \mu + i\mu''$, y una frecuencia $\omega' = \omega + i\omega''$, en lugar de los K , μ y ω correspondientes a un medio elástico perfecto. La presencia de pequeñas componentes imaginarias en las ecuaciones del movimiento da lugar, al hallar las soluciones, a ondas de propagación que se amortiguan.

El primer autor que introdujo Q^{-1} , en la ecuación del movimiento en un medio elástico disipativo, fue Knopoff (1956). La ecuación resultante puede escribirse:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{grad div } \vec{u} - \mu \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_\beta} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{rot}(\text{rot } \vec{u}) \quad (1-9)$$

siendo \vec{u} el vector de desplazamientos y, Q_α y Q_β , los factores de calidad asociados a ondas P y S respectivamente. (En el capítulo 8 se deducirá dicha fórmula al estudiar procesos disipativos en un cuerpo en equilibrio termodinámico incompleto).

Cuando consideramos una onda monocromática proporcional a $e^{i\omega t}$, la ecuación (1-9) corresponde a la de un medio sin disipación tomando $(\lambda + 2\mu)(1 + i \text{sig}(\omega)/Q_\alpha)$ y $\mu(1 + i \text{sig}(\omega)/Q_\beta)$ en lugar de $\lambda + 2\mu$ y μ respectivamente. Esto equivale, como ya se ha dicho, a tomar módulos complejos de elasticidad $\lambda' = \lambda + i\lambda''$ y $\mu' = \mu + i\mu''$, obteniendo para Q , las expresiones:

$$\frac{1}{Q_\alpha} = \frac{\lambda'' + 2\mu''}{\lambda + 2\mu} \quad ; \quad \frac{1}{Q_\beta} = \frac{\mu''}{\mu} \quad , \quad (\lambda = K - \frac{2}{3}\mu) \quad (1-10)$$

Si queremos ver como se expresa la atenuación espacial de ondas monocromáticas, consideremos el caso de una dimensión. La ecuación del movimiento para una onda $u = U e^{i\omega t}$ es, aplicando (1-9)

$$\left(1 + \frac{i}{Q}\right) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c} u = 0$$

siendo o igual a $\sqrt{\lambda+2\mu}$ o $\sqrt{\mu/\rho}$, según sea la onda longitudinal o transversal. La solución es:

$$u = \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{i}{Q} \right)^{-1/2} x \right]$$

suponiendo $Q \gg 1$ y quedándonos sólo con términos en $1/Q$, se tiene

$$u = \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} x - \frac{\omega x}{2cQ} \right] \quad (1-11)$$

por lo que, para una onda de propagación, la atenuación viene expresada por $e^{-\frac{\omega x}{2cQ}}$, o introduciendo un vector de onda complejo $k - ik^*$, por e^{-k^*x} , siendo:

$$k^* = \frac{\omega}{2cQ} \quad (1-12)$$

$$y \quad \frac{1}{Q_x} = \frac{2k^*}{k} \quad (1-13)$$

Para ver la atenuación con el transcurso del tiempo, introduzcamos $v = \sqrt{e^{-ikx}}$ en la ecuación (1-9), la solución resultante es:

$$v = \exp \left[i\omega t - ikx - \frac{\omega}{2Q} t \right] \quad (1-14)$$

Una onda estacionaria ($\propto \cos kx \cos \omega t$) puede obtenerse como superposición de dos del tipo $e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}$, por lo que la disminución de las amplitudes en el tiempo, viene dada por $e^{-\gamma t}$, con:

$$\gamma = \frac{\omega}{2Q_T} \quad (1-15)$$

Si introducimos la frecuencia compleja $\omega + i\omega^*$, obtenemos (1-14) para $\omega^* = \frac{\omega}{2Q_T}$, que es otra manera de expresar la atenuación temporal, viniendo expresado Q_T^{-1} de un modo formal por:

$$Q_T^{-1} = \frac{2\omega^*}{\omega} \quad (1-16)$$

Se puede encontrar una relación entre los valores Q_x obtenidos a partir de ondas progresivas superficiales, con aquellos Q_T calculados a partir de oscilaciones libres u ondas estacionarias. Según puede verse en el artículo de Sato (1967), se tiene que:

$$c Q_x = U Q_r \quad (1-17)$$

siendo U la velocidad de grupo.

En el tratamiento realizado en este capítulo se ha adoptado un punto de mira formal, sin intentar buscar las causas del comportamiento anelástico de los sólidos que serán revisadas en la segunda parte de esta memoria. Este enfoque nos sirve para definir los parámetros que describen el comportamiento anelástico en un sólido continuo, siendo de gran utilidad en el estudio de la atenuación de ondas sísmicas.

C A P I T U L O 2

ANELASTICIDAD DE LA TIERRA

2.1.- INTRODUCCION

En el capítulo anterior, se hicieron consideraciones de tipo general sobre el problema de la anelasticidad de los sólidos; desde ahora, nos ocuparemos del estudio del fenómeno anelástico en la Tierra.

La Tierra, como conjunto de policristales y de fases distintas, no se comporta de un modo perfectamente elástico. La energía elástica liberada en su interior, se convierte en otras formas de energía mediante una serie de mecanismos de disipación.

La importancia que se concede actualmente al estudio de la fricción interna Q^{-1} y su distribución con la profundidad, proviene de que los mecanismos fundamentales que causan la anelasticidad de la Tierra, están íntimamente ligados con la estructura y composición atómica de su interior, así como a distribuciones de presión y temperatura. Por ello, el conocimiento de estos mecanismos, nos llevan necesariamente a un mejor conocimiento de la composición y procesos físicos del interior terrestre.

El estudio de la anelasticidad de la Tierra se efectúa mediante:

- a) Ondas sísmicas de propagación que se amortiguan de tal modo que su amplitud disminuye con la distancia de acuerdo con la expresión: $B \cdot \exp(-k \cdot x)$
- b) Ondas estacionarias (modos normales de las oscilaciones libres de la Tierra). En este caso la amplitud varía en el tiempo según la expresión: $A \cdot \exp(-\gamma t)$, ver el trabajo de Knopoff (1969).

En este capítulo se van a revisar algunos de los datos obtenidos por la Sismología, para la anelasticidad del Manto, mediante ondas in-

ternas longitudinales y transversales. En este tipo de experimentos, se miden unos factores Q_{α}^{-1} y Q_{β}^{-1} , que son promedios de los $Q_{\alpha,j}^{-1}$ y $Q_{\beta,j}^{-1}$, intrínsecos de las zonas que atraviesa la onda sísmica en su recorrido.

El estudio de la anelasticidad mediante ondas superficiales, da lugar a un factor Q^{-1} , que depende de los factores $Q_{\alpha,j}^{-1}$ y $Q_{\beta,j}^{-1}$, de las zonas atravesadas y de la frecuencia, aún cuando los Q_j^{-1} intrínsecos sean independientes (1). Además, mediante dichas ondas solo se ob tiene información válida de los primeros 300 ó 400 km. del Manto.

La utilización de los modos normales de las oscilaciones libres, presenta dificultades a causa de la separación imperfecta entre distintos modos a la misma frecuencia y a la aparición de desdoblamientos en el espectro debidos a la rotación de la Tierra, elipticidad, efectos producidos por la estructura desconocida del núcleo, ruidos no estacionarios de la Tierra y excitaciones post-terremoto. Tal como señala Smith (1972), para conseguir avances significativos, se necesitan mejoras importantes en la instrumentación sísmica de periodo largo, así como en nuestra capacidad para manejar inhomogeneidades laterales de la Tierra.

Para una revisión de métodos y resultados basados en ondas superficiales y oscilaciones libres, es aconsejable consultar las excelentes revisiones de Sato (1967) y Smith (1972); tiene interés también, el trabajo reciente de Anderson y Hart (1978), en el que se intenta obtener una distribución de Q^{-1} con la profundidad, reuniendo datos de ondas internas, superficiales, y estacionarias.

(1) Las expresiones que ligán los factores de disipación aparentes para ondas superficiales de Love y Rayleigh, con los factores intrínsecos $Q_{\alpha,j}^{-1}$ y $Q_{\beta,j}^{-1}$ de las zonas atravesadas, son según Anderson et al. (1965):

$$Q_L^{-1} = \sum_j \left(\frac{\beta_j}{c_L} \frac{\partial c_L}{\partial \beta_j} \right) Q_{\beta,j}^{-1}$$

$$Q_R^{-1} = \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{c_R} \frac{\partial c_R}{\partial \alpha_j} \right) Q_{\alpha,j}^{-1} + \sum_j \left(\frac{\beta_j}{c_R} \frac{\partial c_R}{\partial \beta_j} \right) Q_{\beta,j}^{-1}$$

siendo α_j y β_j velocidades para las ondas longitudinales y transversales y, c_L y c_R , las velocidades de fase de las ondas Love y Rayleigh.

2.2.- DETERMINACION DE Q^{-1} MEDIANTE ONDAS SISMICAS INTERNAS

A lo largo de todo este trabajo, ya sólo se estudiará la atenuación de ondas internas en el Manto, lo que nos servirá para conocer la distribución intrínseca de Q^{-1} en él. Esta magnitud es de difícil cálculo a causa de los diversos factores que afectan a las amplitudes de estas ondas, tales como: dispersiones en fronteras, ensanche geométrico, espectro de radiación del foco, incertidumbres instrumentales, inhomogeneidades radiales y laterales, estructura local de la Corteza, aparte de la dependencia aún no determinada de Q^{-1} respecto de la frecuencia. La obtención de la fricción interna intrínseca mediante ondas internas, es por todo ello un problema muy complejo, como se verá en los capítulos 3 y 4, y supone el empleo de amplitudes lo más exactas posibles y de técnicas adecuadas para eliminar en ellas todos aquellos efectos que no sean la propia fricción interna.

En el caso más general, la amplitud de una onda interna en el dominio de las frecuencias, puede escribirse (Sato, 1967):

$$A(\omega) = F \cdot R_{\theta\psi} \cdot G \cdot T_R \cdot R_c \cdot C_s \cdot I \cdot S \cdot e^{-T/2Q \cdot \omega} \quad (2-1)$$

donde

$F(\omega)$: espectro de amplitudes del foco, depende de la frecuencia

$R_{\theta\psi}$: factor de radiación debido al mecanismo focal, función del ángulo de emergencia del rayo en el foco y del ángulo azimutal del punto de observación.

G : factor de extensión geométrica del frente de onda.

$$G = \left[\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1} \frac{\sin \theta_f}{r^2 \sin \Delta \cos \theta} \frac{d\theta_f}{d\Delta} \right]^{1/2}$$

los subíndices o y f , se refieren a observador y foco respectivamente, y θ es el ángulo entre el radio vector y la tangente al rayo, siendo Δ la distancia epicentral.

T_R : coeficiente de transmisión cuando existe alguna discontinuidad importante.

R_o : coeficiente de reflexión en la frontera Manto-Núcleo, se toma igual a uno, si el rayo considerado no alcanza la frontera.

$C_s(\omega)$: efecto de la estructura de capas de la Corteza.

$I(\omega)$: amplitud de la respuesta instrumental.

S : incluye otros efectos, como dispersión en fronteras, zonas de bajas velocidades etc.

Por último:

$$\frac{T}{2Q} = \frac{1}{2} \int_{r_o}^{r_s} \frac{ds}{Q(r)V(r)} = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{r dr}{QV^2 \sqrt{(r/V)^2 - p^2}}$$

Este término es el que tiene en cuenta la fricción interna Q^{-1} , siendo p , el parámetro del rayo.

Se puede comprender que tener en cuenta todos estos efectos, es muy difícil, en caso de ser posible. En los trabajos realizados con ondas internas, se intenta obtener Q considerando el menor número de efectos posible. El conjunto de términos de (2-1) se puede agrupar en dos: uno, que abarca aquellos que no dependen de la frecuencia y el otro, los que si dependen.

$$A(\omega) = (R_{o\psi} \cdot G \cdot T_R \cdot R_o \cdot S) \cdot (F(\omega) \cdot C_s(\omega) \cdot I(\omega) \cdot e^{-T/2Q\omega}) \quad (2-2)$$

Si tenemos en cuenta que $C_s(\omega)$ es prácticamente independiente de la frecuencia para pequeñas variaciones en el ángulo de incidencia en el "Moho", y que la respuesta del sismómetro se conoce, una vez corregida la amplitud $A(\omega)$, con $I(\omega)$, resulta:

$$A_{corr}(\omega) = D \cdot F(\omega) \cdot e^{-T/2Q\omega} \quad (2-3)$$

donde $D = R_{o\psi} \cdot G \cdot T_R \cdot R_o \cdot S$, siendo T y Q , el tiempo y factor de calidad medios del trayecto. Tomando logaritmos en (2-3)

$$\ln A_c(\omega) = \ln F(\omega) - \frac{T}{2Q} \omega + Cte \quad (2-4)$$

El problema de este procedimiento radica en el cálculo del espectro focal $F(\omega)$. Una vez conocido, se puede determinar Q del gráfico que relaciona $\ln A_0(\omega)$ y ω .

Sato (1967) hace revisión de las distintas hipótesis y métodos de que se han valido diversos autores para calcular Q mediante ondas internas. Prácticamente, todos los resultados obtenidos de este tipo de ondas, provienen de sismos de foco profundo.

Los experimentos realizados son de tres tipos (Smith, 1972)

1. Cálculos de relaciones de amplitudes de ondas múltiplemente reflejadas en el Nucleo.
2. Cálculo de cocientes de amplitudes espectrales de ondas a distintas distancias epicentrales.
3. Cálculo mediante amplitudes normalizadas a la energía del sismo para ondas de sismos diferentes.

En cualquier aproximación, hay que hacer hipótesis sobre el el espectro focal y suponer la independencia de Q respecto de ω .

Del conjunto de datos sobre atenuación de ondas internas, Tablas 2-1 y 2-2, se puede concluir que:

1. La fricción interna Q^{-1} , en el Manto Superior es aproximadamente un orden de magnitud mayor que en el Manto Inferior.
2. Aunque la relación entre las fricciones internas de las ondas longitudinales y transversales, Q_α y Q_β , no está perfectamente establecida, son del mismo orden de magnitud. Así Kanamori (1967a) obtiene $Q_\alpha^{-1} \approx Q_\beta^{-1}$ en (1967b), $Q_\beta^{-1} \approx 1.9 Q_\alpha^{-1}$ Anderson et al. (1965) $2.5 Q_\alpha^{-1} > Q_\beta^{-1} > 1.8 Q_\alpha^{-1}$.
3. En todas las experiencias se apunta la existencia de una zona de alta Q^{-1} , o disipación de energía alta, en el Manto Superior y que parece coincidir en parte, con la zona de bajas velocidades de Gutenberg.

4. Todas las técnicas utilizadas en la determinación de Q^{-1} , suponen la independencia de ésta respecto de la frecuencia, para los periodos correspondientes a las ondas internas. Aun no ha podido demostrarse que ésta hipótesis no sea válida.

Así pues, cualquier teoría sobre mecanismos de atenuación válidos en el interior de la Tierra, deberá tener en cuenta y explicar las tres primeras propiedades y respecto a la cuarta, la fricción interna que se obtenga mediante esa teoría, si depende de la frecuencia ha de ser de un modo poco acusado.

En las restantes secciones de éste capítulo, se dará una visión general de las características que presenta la atenuación de las ondas internas en tres zonas bien diferenciadas: Corteza, Manto Superior, y Manto Inferior.

2.3.- ATENUACION EN LA CORTEZA

En la Corteza, los procesos que dan lugar a la disipación de energía elástica, parecen esencialmente distintos de los que actúen en el Manto, debido a las grandes diferencias de presión y temperatura de ambas regiones.

A las presiones y temperaturas de la Corteza, pueden ser importantes algunos efectos mecánicos de rozamientos en hendiduras, grietas y porosidades. También pueden actuar mecanismos de dislocaciones (como relajación de Bordoni), que a las presiones del Manto son muy poco probables.

Press (1964) calcula la atenuación de ondas P_g y L_g en la Corteza, obteniendo:

$$Q_p = 450 \pm 30$$

para periodos medios entre 0,6 y 1,4 s.

Este valor de Q en la Corteza se utiliza en los modelos de va-

riación de Q con la profundidad, como el MM8 de Anderson et al. (1965) o el activado térmicamente de Anderson y Arohanbeau (1964).

2.4.- ATENUACION DE ONDAS INTERNAS EN EL MANTO SUPERIOR

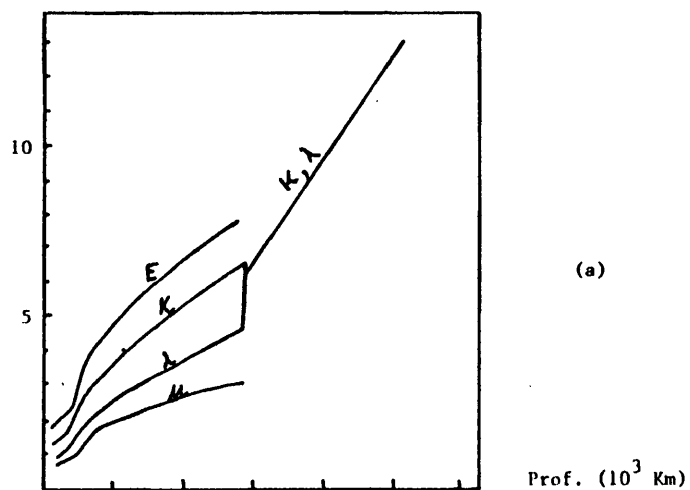
En el Manto Superior, el dato mas significativo es la existencia de la zona de bajas velocidades de Gutenberg, situada entre los 100 y 400 ó 600 km, que coincide en primera aproximación con la zona en que tiene lugar un aumento anómalo de los módulos elásticos. En la figura 2-1, puede apreciarse la distribución de módulos y constantes elásticas con la profundidad (a) y de la presión (b), según Bullen (1963).

Jeffreys y Benal atribuyen la existencia de esta zona de bajas velocidades de las ondas S, a la transición a altas presiones del olivino a espinela. Ringwood (1962) encuentra experimentalmente que dicha transición tendrá lugar en el Manto a profundidades comprendidas entre los 320 y 600 km.

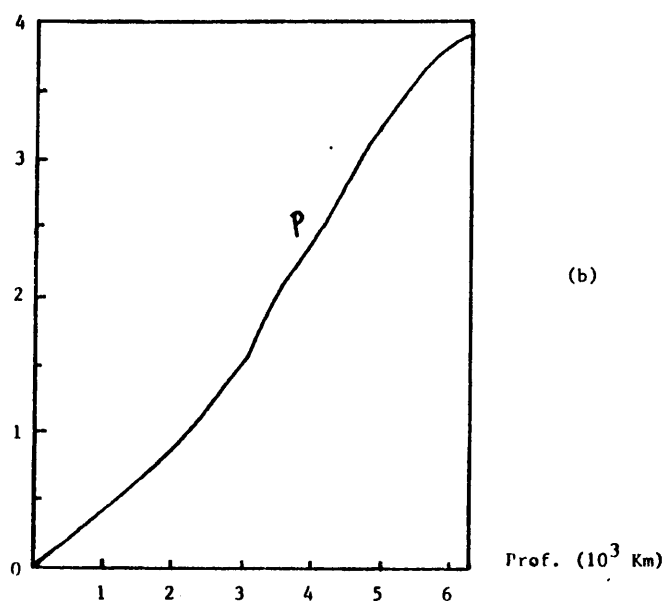
Segun Orowan (1967), Gutenberg y Elsasser atribuyen la blandura de la astenosfera a la circunstancia de que, en la zona de bajas velocidades, se alcanza casi el punto de fusión de los materiales del Manto. Entonces, hacen su aparición inclusiones líquidas de las componentes de menor punto de fusión, disminuyendo la velocidad de las ondas sísmicas. A profundidades superiores, el efecto debido al aumento de la presión, es mas importante que el debido al crecimiento lento de la temperatura, y la diferencia entre el punto de fusión de los materiales del Manto y la temperatura a que se encuentran aumenta.

Durante las transformaciones de fase, la movilidad atómica aumenta y las energías de activación de los procesos que dan lugar al efecto anelástico, previsiblemente disminuyen; por lo que la disipación de energía aumenta.

Hay muchas razones que hacen esperar que una región de transiciones de fase, muestre una atenuación alta, como parece encontrarse



(a)



(b)

Figura 2-1. Variación con la profundidad, de acuerdo con el modelo de Bullen, de la presión, p , módulo de Young, E , módulo de compresibilidad, K , y constantes de Lamé, λ y μ , todos en 10^{12} dina/cm².

experimentalmente y que precisamente coincida, al menos en parte, con la zona de bajas velocidades mencionada con anterioridad. Sin embargo, en el modelo que se propone en los capítulos 6 y 7, ésta zona de alta atenuación aparece sin necesidad de suponer transiciones de fase.

En la tabla 2-1, figuran algunos de los resultados (valores medios) obtenidos por diferentes autores, mediante el empleo de ondas internas. La apreciable dispersión existente muestra la dificultad del problema. Algunos experimentos son particularmente buenos, como los basados en reflexiones casi verticales de ondas ScS y sScS de Anderson y Kovach (1964).

TABLA 2-1. Atenuación de ondas P y S en el Manto Superior (Smith, 1972)

$Q_n(1)$	$Q_n^{-1} \cdot 10^4$	Referencia
93	108	Teng (1968)
475	21	Dorman (1968)
180-240	42-56	Kanamori (1967)
140	71	Hirasawa y Takano (1966)
30-300	33-333	Utsu (1966)
500-2000	5-20	O'Brien (1968)

- (1) Es conveniente realizar una aclaración respecto al empleo de Q y Q^{-1} . Al revisar la mayor parte de las observaciones sismológicas de la anelasticidad, la mayor parte de las publicaciones y trabajos tienen en cuenta ésta mediante el factor de calidad Q . No obstante, existen dos razones decisivas que aconsejan utilizar la función de disipación específica o fricción interna, Q^{-1} , en lugar de Q . La primera es que cuando la atenuación está causada por más de un mecanismo, la total viene determinada por una Q^{-1} , suma de las Q^{-1} de cada mecanismo actuando por separado. La segunda, es que una onda sísmica que se propaga por regiones con diferentes propiedades anelásticas, se atenúa de acuerdo con un promedio de las Q^{-1} de cada región y no de las Q 's. (Para ondas internas, el factor peso será el tiempo de permanencia en esa zona y para ondas superficiales y oscilaciones libres, está relacionado con la energía elástica de la onda).

En los trabajos referentes a mecanismos físicos, está totalmente extendido el empleo de Q^{-1} .

TABLA 2-1. (Continuación)

Q_p	$Q_p^{-1} \cdot 10^{-4}$	Referencia
160	62	Steinhart et al. (1964)
150	67	Otsuka (1963)
350	29	Otsuka (1963)
151-185	66-54	Anderson y Kovach (1964)
200	50	Kovach y Anderson (1964)
100	100	Fedotov (1963)

2.5.- ATENUACION DE ONDAS INTERNAS EN EL MANTO INFERIOR

El Manto inferior entre 900 y 2890 km. viene caracterizado porque en él se encuentran materiales análogos a los del Manto superior, pero en estructuras mas compactas. Las ecuaciones de estado del Manto Inferior se conocen sólo mediante sus analogías con las propiedades de los óxidos más densos y salvo en el caso de algunos óxidos, de la stisovita estudiado por McQueen et al. (1967) y del granito, se desconocen las fases, densidades y ecuación de estado a alta presión. Zarkov y Kalinin (1969) estudian este tipo de ecuaciones de estado y señalan la importancia que tiene la determinación del parámetro de Gr \ddot{u} nstein para los silicatos, aun no calculado (Este parámetro aparece en la ecuación de estado de un sólido al tener en cuenta las vibraciones térmicas en la energía libre, como puede verse en el capítulo 38 del libro de Coulomb y Jobert , 1976).

La magnitud física que determina en gran modo las características del Manto Inferior es la presión, que en la frontera con el Nucleo llega a $1,3 \cdot 10^{12}$ dina/cm 2 .

El efecto de tales presiones en los mecanismos atómicos (difusión y creación de defectos y movimiento de dislocaciones), es bastante complejo y aún debe ser determinado con exactitud. Como se verá en

el capítulo 6, los mecanismos basados en defectos puntuales son térmicamente activados, y en ellos la presión actúa de modo contrario a la temperatura, dando lugar a una función de disipación $Q^{-1} \propto \exp(-(E^* + pV^*)/kT)$, donde E^* y V^* son la energía y volumen de activación del proceso considerado. Los mecanismos basados en dislocaciones, según señala Orovan (1967), también disminuyen por rotura y pérdida de movilidad consiguiente.

El efecto de la presión pese al poco conocimiento que tenemos de él, por la imposibilidad de reproducir en el laboratorio las condiciones del Manto, tal como apunta Anderson (1967), parece decisivo en el hecho de que la fricción interna en el Manto Inferior sea un orden de magnitud menor que en el Manto Superior, según puede observarse en la Tabla 2.2.

TABLA 2.2. Atenuación de ondas internas en el Manto Inferior, según Smith (1972)

Q_α	$Q_\alpha^{-1} \cdot 10^4$	Referencia
1600-6000	2-6	Kanamori (1967)
2370	4	Hirasawa y Takano (1966)
1000	10	Teng (1968)
Q_β	$Q_\beta^{-1} \cdot 10^4$	Referencia
1430	7	Anderson y Kovach (1964)
2200	5	Kovach y Anderson (1964)

Los aspectos más detallados de los modelos de Q_α^{-1} , basados en experimentos de ondas internas P, se verán en el capítulo 4, al comparar el calculado en esta memoria con los de otros autores. No obstante, conviene adelantar que en lo que respecta al Manto Superior, no está clara la localización y extensión de la zona de máxima fricción interna. Los resultados obtenidos para el Manto Inferior son

- 27 -

poco numerosos y de mayor dispersión que los correspondientes al Man
to Superior; por lo que resulta realmente desconocida su estructura
disipativa, salvo consideraciones más bien cualitativas.

C A P I T U L O 3

DETERMINACION DE LA FUNCION DE DISIPACION ESPECIFICA MEDIA Q_α^{-1} , COMO FUNCION DE LA DISTANCIA EPICENTRAL.

3.1.- INTRODUCCION

La determinación de la estructura disipativa del Manto para ondas P, consta de dos fases bien diferenciadas. En la primera, se deben determinar las funciones de disipación medias, Q_α^{-1} , de los rayos sísmicos llegados a estaciones situadas a una distancia epicentral variable. La segunda fase consiste en la determinación a partir de los valores $Q_\alpha^{-1}(\Delta)$ hallados, de la atenuación intrínseca de la Tierra; es decir de la determinación de la variación de Q_α^{-1} con la profundidad.

El método empleado en este trabajo se basa en la resolución más directa posible del problema y más que una innovación de concepto, lo que se realiza es un tratamiento del mismo con métodos bien conocidos del análisis numérico.

Por ello, a lo largo de todo el proceso de cálculo, se tendrá en cuenta el análisis de los errores: a) En los datos, estos son de naturaleza estadística y su propagación a lo largo del proceso nos dará una idea de la convergencia de los distintos pasos del mismo. b) De modo complementario se considerarán los errores debidos al modelo utilizado y que son inevitables generalmente, ya que éste es una representación simplificada de la realidad en la que se han de descartar muchos aspectos de esta, procurando que sean solo los más secundarios. c) Errores en los métodos de tratamiento matemático. Estos se introducen a discretizar variables y operadores en las ecuaciones funcionales. d) Errores de redondeo: se producen al trabajar con un número finito de cifras decimales para los números irracionales, o con mayor número de cifras que el admitido en nuestros cálculos. Este último tipo de errores, teniendo

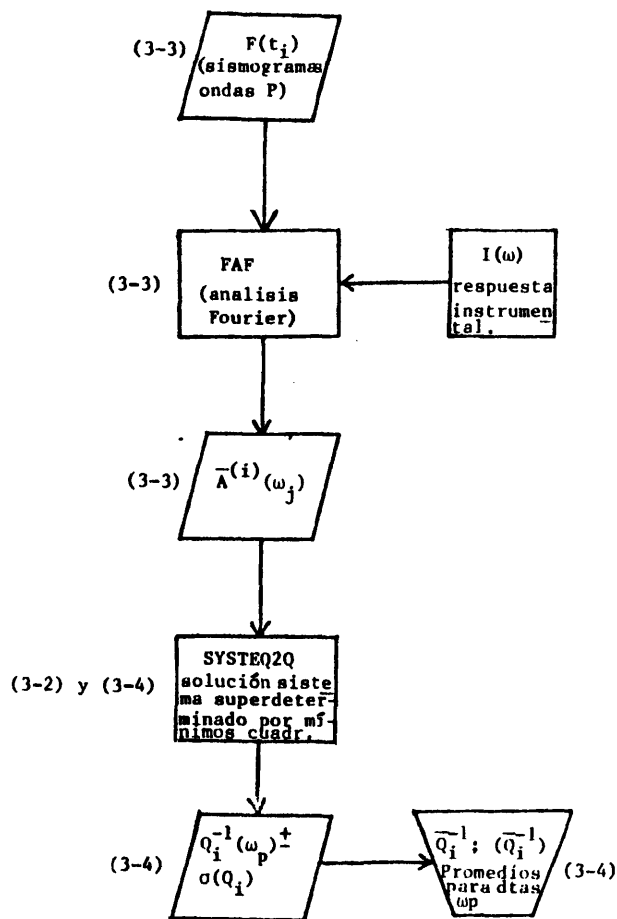


Figura 3-1 Diagrama de flujo del proceso de cálculo de $\bar{Q}_i^{-1}(\Delta)$, expuesto en el capítulo 3.

en cuenta que el ordenador empleado, IBM-370, opera con 7 cifras exactas en simple precisión, es despreciable frente a los errores de tipo a), b) y c).

En este capítulo se realiza una exposición de la primera parte del método, o determinación de $Q_{\alpha}^{-1}(\Delta)$. Para ello se emplearon datos de dos terremotos profundos y un terremoto intermedio. Los resultados a que se llega, son valores medios de la función de disipación Q_{α}^{-1} , para distintas distancias epicentrales junto con sus desviaciones típicas. Se realiza en la última sección, una discusión de los resultados obtenidos y de la posible influencia en ellos de las distintas aproximaciones del modelo empleado.

En la figura 3-1, aparece el diagrama de flujo del proceso de cálculo llevado a cabo en este capítulo. Los números entre paréntesis indican en qué sección de este capítulo se explica dicho paso.

3.2.- METODO DE ANALISIS

La determinación de los valores de Q_{α}^{-1} a partir de ondas internas, como ya se indicó en el capítulo 2, requiere la obtención de amplitudes con errores pequeños, así como la eliminación de aquellos efectos diferentes a los de la fricción interna.

Se vio que el conjunto de términos de la fórmula (2-1) podían agruparse en dos, de tal modo que resultaba la fórmula:

$$A(\omega) = (R_{\theta\varphi} \cdot G \cdot T_R \cdot R_L \cdot S) \cdot (F(\omega) \cdot C_s(\omega) \cdot I(\omega)) e^{-\frac{1}{2} T Q^{-1} \omega} \quad (3-1)$$

Los métodos de cálculo que como éste se basan en relaciones de amplitudes espectrales, parten de dos hipótesis fundamentales:

1. El espectro de emisión del foco es separable en una parte espacial y otra temporal.

$$F_0(\omega; \theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \cdot F(\omega) \quad (3-2)$$

Físicamente esta separación implica que la fuente emite la misma función temporal independientemente de la dirección (esta hipótesis ha sido demostrada por diversos autores, como Teng y Ben Menahem, 1965, para terremotos de magnitud menor de 7 y periodos de onda mayores de unos pocos segundos).

2. Q^{-1} es independiente de la frecuencia, al menos en la banda de 0,01 a 0,15 s⁻¹. La dependencia de Q^{-1} respecto de la frecuencia es un tema actual de estudio (Anderson y Hart, 1978).

De modo general, podemos escribir (3-1) para la onda representada por el índice (j).

$$A_j^{(j)}(\omega) = D.F(\omega) C_s^{(j)}(\omega) I_s^{(j)}(\omega) e^{-\frac{1}{2} T_j Q_j^{-1} \omega} \quad (3-3)$$

Algunos autores, como Mikumo y Kurita (1968), establecen relaciones de amplitudes para la misma frecuencia, de todas las ondas respecto a una que les sirve de referencia. El propósito es el de eliminar el espectro focal $F(\omega)$ de la ecuación que resulta de la (3-3) al efectuar el cociente entre amplitudes. Este procedimiento tiene una desventaja evidente, ya que no nos permite obtener valores absolutos de Q_j^{-1} . Lo que se tiene son valores relativos de Q_j^{-1} respecto a la Q_{ref}^{-1} , de la onda de referencia, mediante un ajuste por rectas de regresión de coordenadas en el origen nula, y pendiente:

$$\frac{T_j}{2Q_j} = \frac{T_{ref}}{2Q_{ref}} \quad (3-4)$$

Los datos así obtenidos pueden servir como condiciones o ligaduras que deben imponerse a los valores de la función de disipación intrínseca $Q^{-1}(r)$, en determinadas zonas del interior de la Tierra. Evidentemente, no se puede obtener una distribución $Q^{-1}(r)$, a partir de datos relativos como los de (3-4), sin asignar un valor a Q_{ref} , lo que supone una considerable arbitrariedad.

A fin de evitar este inconveniente, se procedió de un modo diferente. Para cada estación (i), se calcularon los logaritmos de los

ocientes de amplitudes para cualquier frecuencia ω_j y una frecuencia ω_p , tomada como referencia. Para la estación (i), se tiene

$$\ln \frac{A^{(i)}(\omega_j)}{A^{(i)}(\omega_p)} = \ln \frac{C_s^{(i)}(\omega_j) \cdot I^{(i)}(\omega_j) \cdot F(\omega_j)}{C_s^{(i)}(\omega_p) \cdot I^{(i)}(\omega_p) \cdot F(\omega_p)} - \frac{1}{2}(\omega_j - \omega_p) T_i Q_i^{-1} \quad (3-5)$$

Si se corrigen los espectros con la respuesta instrumental y trabajamos con frecuencias comprendidas entre 0,02 y 0,13 s⁻¹, podremos suponer con Kurita (1966), que la respuesta de la corteza $C_s(\omega)$, no varía de una estación a otra salvo por diferencias en el ángulo de incidencia del rayo en la discontinuidad de Mohorovicic.

Si consideramos grupos de estaciones tales que para ellas los ángulos de incidencias en el Moho, de los rayos sísmicos correspondientes, difieren poco $\Delta i < 10^\circ$, podemos obtener, a partir de (3-5), las ecuaciones:

$$\ln \frac{\bar{A}^{(i)}(\omega_j)}{\bar{A}^{(i)}(\omega_p)} = \ln \frac{F(\omega_j) \cdot C_s(\omega_j)}{F(\omega_p) \cdot C_s(\omega_p)} - \frac{1}{2}(\omega_j - \omega_p) T_i Q_i^{-1} \quad (3-6)$$

siendo $\bar{A}^{(i)}(\omega)$ el espectro de amplitudes corregido por la respuesta instrumental.

Con las suposiciones realizadas de igualdad en los ángulos de incidencia, $C_s(\omega_j)/C_s(\omega_p)$ no depende de la estación considerada, ni tampoco $F(\omega_j)/F(\omega_p)$, por lo que no figura para ellos el índice (i), en la fórmula (3-6).

Si para simplificar adoptamos la notación:

$$\begin{aligned} a_{j,p}^{(i)} &= \ln \frac{\bar{A}^{(i)}(\omega_j)}{\bar{A}^{(i)}(\omega_p)} \\ c_{f,j,p} &= \ln \frac{F(\omega_j) C_s(\omega_j)}{F(\omega_p) C_s(\omega_p)} \\ \Delta \omega_{j,p} &= \omega_j - \omega_p \end{aligned} \quad (3-7)$$

se obtiene el sistema superdeterminado:

$$a_{j,p}^{(i)} = c_{f,j,p} - \frac{1}{2} \Delta \omega_{j,p} T_i Q_i^{-1} \quad (3-8)$$

donde el índice i , va de 1 a NS (número de rayos con ángulos de incidencia en el Mohó similares; y j va de 1 hasta NF (número de frecuencias consideradas en el análisis de Fourier, excepto la frecuencia de referencia).

El índice de la frecuencia patrón no influye en el número de ecuaciones disponibles $NS \times (NF-1)$ y solo se tuvo en cuenta, porque su variación nos da una indicación de la adecuación del modelo empleado y de las hipótesis de partida de separabilidad del espectro focal y de independencia de Q^{-1} respecto de la frecuencia.

Asimismo, hay efectos como incertidumbres debidas a la estructura local de la corteza, difracción en la frontera Manto-Núcleo, que no han sido consideradas explícitamente en la ecuación (3-1) que condujo finalmente al sistema (3-6), aún cuando la elección de las ondas se hizo evitando en lo posible el segundo de estos efectos. Supondremos con otros autores (Mikumo y Kurita, 1968) que dichos efectos se reducen a un mínimo cuando, como en (3-5), se toman diferencias entre sus logaritmos para distintas frecuencias.

La influencia de la variación de los valores de Q^{-1} calculados, al cambiar la frecuencia de referencia, nos dará también un índice de la validez de estas simplificaciones.

En lo que resta de capítulo, se tratará de la resolución del sistema (3-8) de $NS \times (NF-1)$ ecuaciones, con $NS (Q_1^{-1}) + NF-1$ (of_j) incógnitas, que nos proporciona los valores de los factores de disipación Q_1^{-1} , que constituyen el objetivo de este capítulo.

3.3.- ANÁLISIS DE DATOS

3.3.1.- Datos empleados

Se trabajó con datos correspondientes a 3 terremotos que figuran en la Tabla 3-1. Los datos analizados fueron los correspondientes a

las componentes verticales de periodo largo de los sismogramas registrados en estaciones de la red standard (WWSSN). El número de estaciones utilizado fué de 34, 19 y 14 para los terremotos 1, 2 y 3 respectivamente. La información correspondiente a estos terremotos para cada estación, como son: ángulos azimutales y de emergencia del foco, distancias epicentrales, tiempos de recorrido, periodos de sismógrafo y de galvanómetro etc., figuran en las tablas 3-2a,b y c. En las figuras 3-2a,b y c, se han representado las componentes verticales de algunas de las ondas P estudiadas, en orden creciente de distancia epicentral.

TABLA 3-1. Terremotos utilizados en este trabajo. NT: n° de terremoto; T. origen: tiempo origen; P: profundidad; M: magnitud. NS: n° de estaciones y T_L : longitud de muestreo.

NT	T.origen	Lugar	P (km)	M	NS	T_L (s)	Rango de frecuencias (s^{-1})
1	3, Nov. 1965 01h39m2,5s	9,1°S, 71,4°W Frontera Perú - Brasil	583	6,2	34	37,2	0,027-0,139
2	17, Mar. 1966 15h50m32,2s	21,1°S, 179°2W Islas Fiji	626	6,2	19	37,2	0,027 - 0,139
3	28, Ag. 1962	38°N, 23,1°E Grecia	120	6,8	14	24,5	0,04 - 0,123

3.3.2.- Análisis espectral

Los terremotos 1 y 2 son de foco profundo, por ello, las llegadas de las ondas P están muy bien diferenciadas de las de ondas posteriores. La única fase que puede inducir a error es la PoP, que llega con un retraso respecto a la P, que disminuye con la distancia epicentral, llegando a solaparse para $\Delta > 90^\circ$. En el caso del terremoto n° 3 de profundidad intermedia, una fase pP aguda y perfectamente visible llega entre 25 y 30 s

TABLA 3-2 Lista de estaciones e información necesaria
 Δ = Distancia epicentral; ψ = azimut; T = tiempo de recorrido;
 i_f = ángulo de emergencia del foco; T_0 = período libre del sig
mógrafo; T_g = período del galvanómetro; M = Magnificación.

(a) TERREMOTO N° 1

N° Estación .	Código	Δ (grados)	ψ (grados)	i_f (grados)	T(s)	T_0, T_g (s)	M
1	BIIP	19,7	335,4	69,5	233	15-100	750
2	CAR	20,0	13,0	68,5	236	"	3000
3	PEL	23,9	178,5	64,5	271	"	1500
4	SJG	27,5	10,9	61,5	302	"	750
5	LPA	28,5	156,3	61,0	312	"	750
6	CHG	38,8	43,1	55,5	397	"	3000
7	BEL	41,7	8,6	53,5	420	"	1500
8	SHA	42,7	338,5	93,0	428	"	1500
9	SOM	43,6	178,1	52,5	435	"	375
10	ATL	44,1	344,4	52,0	440	"	1500
11	OXF	46,6	339,4	50,5	458	"	3000
12	GEO	48,0	354,1	49,5	468	"	1500
13	OGD	50,0	356,8	48,0	483	30-100	3000
14	SCP	50,0	353,6	48,0	483	15-100	1500
15	FLO	50,8	340,9	47,5	489	"	3000
16	WES	51,2	0,1	47,5	492	"	3000
17	AAM	52,4	348,5	46,5	500	"	1500
18	ALQ	54,9	324,8	45,0	518	"	3000
19	TUC	55,8	319,5	44,5	524	"	3000
20	GOL	57,9	329,4	43,5	538	30-100	1500
21	RCD	60,3	334,4	42,0	555	15-100	1500
22	COR	71,0	323,5	36,5	621	"	1000
23	LON	71,4	326,0	36,0	624	"	1500
24	PTO	76,2	43,8	33,5	650	"	750
25	MAL	77,5	49,2	33,0	657	"	3000
26	TOL	78,9	46,4	32,5	664	"	1500
27	VAL	80,1	33,4	32,0	671	"	750
28	SPA	81,0	180,0	31,5	675	30-100	375
29	CMC	82,8	344,7	30,5	684	15-100	3000
30	WIN	85,2	112,0	29,5	696	"	1500
31	NOR	94,1	6,9	27,5	738	"	677
32	PRE	96,0	116,9	27,5	746	"	1500
33	BUL	96,2	111,5	27,5	747	"	1500
34	IST	103,7	50,0	27,0	780	"	1500

TABLA 3-2 Lista de estaciones e información necesaria (continuación)

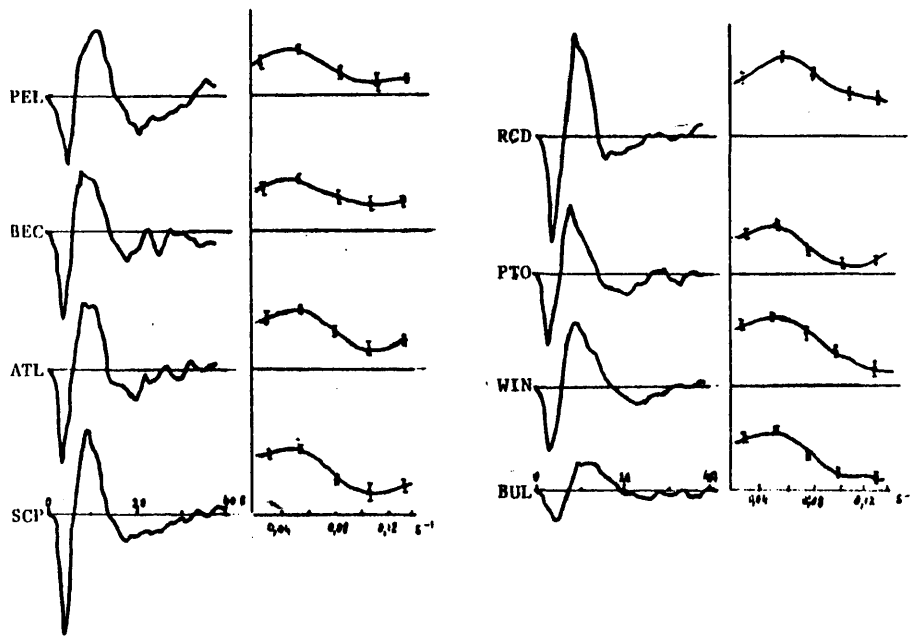
(b) TERREMOTO N° 2

N° Estación	Código	Δ (grados)	ψ (grados)	i_f (grados)	T_f (s)	T_0, T_g (s)	M
1	HNR	23,2	296,9	65,0	261	15-100	1500
2	CTA	32,3	265,5	58,5	341	"	3000
3	RAB	32,5	297,2	58,4	343	"	750
4	PMC	34,1	284,6	57,6	358	"	3000
5	GUA	49,3	311,2	48,7	475	"	750
6	BAG	69,8	297,5	36,9	610	"	3000
7	LEM	71,9	269,5	35,9	623	"	750
8	HKC	78,0	299,6	33,0	657	"	750
9	GSC	81,5	47,1	31,2	675	"	1500
10	SNG	83,5	280,2	30,3	684	"	3000
11	TUC	84,2	52,3	29,9	688	"	1500
12	LON	85,1	35,6	29,6	692	"	1500
13	ALQ	88,7	51,7	28,4	709	"	3000
14	COL	89,1	12,8	28,2	711	"	1500
15	CHG	89,4	290,3	28,2	713	"	3000
16	SHL	97,9	294,3	27,2	751	"	3000
17	CMC	100,2	20,3	27,0	762	"	3000
18	LPA	101,2	134,3	27,0	766	"	750
19	OKF	101,5	57,4	27,0	768	"	3000

(c) TERREMOTO N° 3

1	QUE	36,9	88,8	38,0	414	30-100	3000
2	WES	68,5	307,4	26,9	646	"	1500
3	BEL	69,4	295,4	26,5	652	"	1500
4	GEO	74,1	307,0	25,1	680	"	750
5	TRN	79,2	275,1	23,3	709	"	750
6	MNN	79,5	319,6	23,2	710	"	2950
7	FLO	82,1	313,7	22,3	724	"	1500
8	CAR	83,6	278,3	21,9	731	"	1450
9	RCD	85,0	324,3	21,4	739	"	750
10	BAG	85,8	72,6	21,2	742	"	1500
11	DAL	90,0	313,1	20,3	762	"	1500
12	COR	92,4	336,7	19,8	774	"	1430
13	BOG	92,8	278,0	19,7	776	"	3000
14	ALQ	93,7	320,6	19,6	779	"	3000

(a) Terremoto n° 1



(b) Terremoto n° 2

(c) Terremoto n° 3

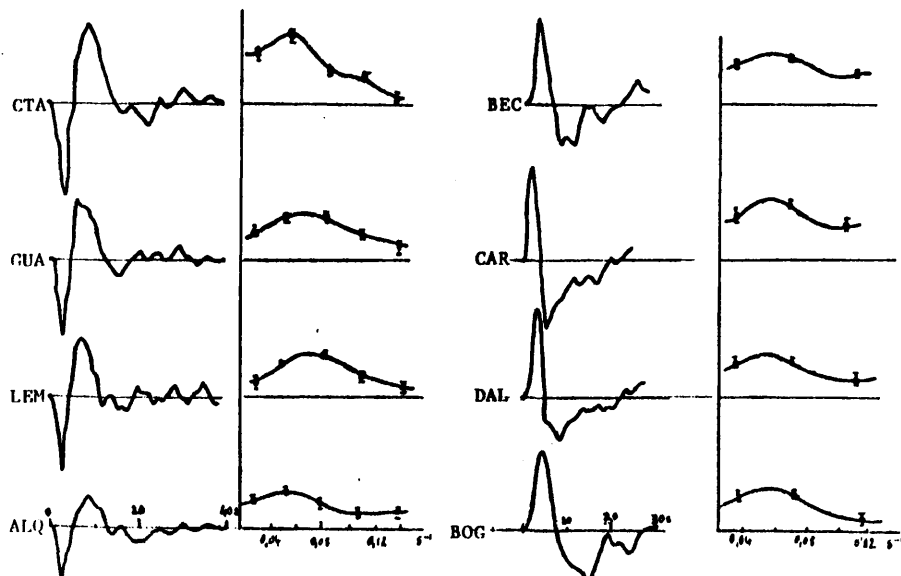


Figura 3-2 Algunas de las ondas P y sus correspondientes espectros de amplitudes corregidas por la respuesta instrumental, $A(\omega)$.

después de la primera onda P, para todas las distancias epicentrales.

Para evitar posibles contaminaciones por fases posteriores, se tomó una longitud de muestreo en la onda P, que es la que figura en la tabla 3-1 como T_L . Las señales así truncadas (limitadas en el tiempo) fueron digitizadas con un intervalo de muestreo $\Delta t \sim 1$ ms. A fin de reducir la distorsión causada por la truncación de $A(t)$, en el espectro de frecuencias, se aplicó una ventana de Hamming.

El espectro de amplitudes, $A(\omega)$, de las señales correspondientes a las ondas P registradas en las estaciones que figuran en la tabla 3-2, se calculó mediante el programa FAF (Fourier Análisis Fórmula) que emplea el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), propuesto por Cooley y Tukey (1965) - Dicho algoritmo permite reducir el tiempo de cálculo de la transformada de Fourier en una proporción $N^2 / 2N \log_2 N$, siendo N el número de puntos muestreados en $A(t)$.

3.3.3.- Respuesta instrumental

El programa FAF permite también efectuar la corrección debida a la respuesta del instrumento. Se introdujeron las curvas de respuesta $I(\omega)$ de los sismómetros de periodo largo de la WWSSN, que se representan en la figura 3-3.

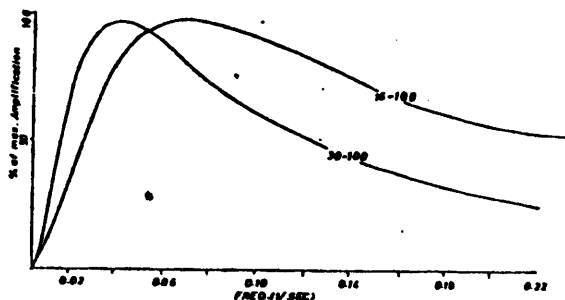


Figura 3-3. Curvas de respuesta instrumental de los sismómetros de periodos 15 s y 30 s, de la WWSSN.

En la figura 3-2 aparecen, junto algunas de las ondas P registradas, los correspondientes espectros de amplitudes $\bar{A}(\omega)$ corregidos por la respuesta instrumental.

Debido a que analizamos una señal discreta, resultado de la digitalización de $A(t)$ a intervalos Δt , nuestro análisis puede llegar como máximo a la frecuencia de Nyquist: $\nu_N = 1/2\Delta t$, lo que en este caso no es ninguna limitación, ya que se está considerando un rango de frecuencias cuyo límite superior es muy inferior a ésta, $\nu_N \approx 0,4 \text{ s}^{-1}$. Por el teorema del muestreo, dado que la señal original tiene una longitud T_L , la resolución que se puede obtener en el análisis de frecuencias es: $\Delta\nu = 1/T_L$. ($\approx 0,027 \text{ s}^{-1}$ para los terremotos 1 y 2 y $\approx 0,04 \text{ s}^{-1}$ para el terremoto nº 3). Por ello en la figura 3-2 aparecen los puntos que representan las amplitudes a intervalos $\Delta\nu$, junto con sus desviaciones y una curva continua resultante de la interpolación cúbica entre dichos puntos.

3.4.- CALCULO DE Q^{-1} A DISTINTAS DISTANCIAS EPICENTRALES

3.4.1.- Método de resolución

A continuación, se concreta el método de análisis ya apuntado en la sección 3-2. Se vió que para un terremoto de los estudiados y para un grupo de rayos sísmicos cuyos ángulos de incidencia en el Moho (y consiguientemente sus ángulos de emergencia del foco, i_p), difieran poco, se tenía el sistema superdeterminado (3-8). Para una frecuencia angular de referencia dada, ω_p , se puede escribir como:

$$a_j^{(i)} = c f_j - \frac{\Delta\omega_j}{2} T_i \omega_i^{-1} \quad (3-8')$$

La resolución de este sistema se efectuó aplicando el principio de mínimos cuadrados. Dado que el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, no se puede hallar, en general, una solución exacta de (3-8'). Entonces, se buscará una solución aproximada imponiendo que

la suma de los cuadrados de las desviaciones sea mínima.

Si consideramos el sistema : $\bar{A} \cdot \bar{X} = \bar{B}$, siendo $\dim(A) = m \cdot n$; $\dim(B) = m$, y $\dim(X) = n$; tal que $m > n$, la condición referida: $\sum \epsilon_i^2 = \sum (b_i - a_j^i x_j)^2$ mínimo, nos conduce al sistema normal equivalente del superdeterminado (Hildebrand, 1956)

$$(\bar{A}^T \bar{A}) \bar{X} = \bar{A}^T \bar{B} \quad (3-9)$$

Escribamos ahora la ecuación (3-8), en forma matricial explícita

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{(n,n)} & -\frac{T_1}{2} \Delta \bar{\omega}^{(n)} & \bar{0} & \vdots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{I} & \bar{0} & \frac{T_1}{2} \Delta \bar{\omega} & \vdots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{I} & \bar{0} & \bar{0} & \vdots & -\frac{T_m}{2} \Delta \bar{\omega} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{f1} \\ c_{f2} \\ \vdots \\ c_{fn} \\ Q_1^{-1} \\ \vdots \\ Q_n^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(n)} \\ \bar{a}_2^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{a}_m^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

donde $\bar{a}_i^{(n)}$ y $\Delta \bar{\omega}^{(n)}$ son los vectores columna de dimensión n , cuyas componentes son las $\bar{a}_{j,p}^{(i)}$ y $\Delta \omega_{j,p}$ de (3-7).

Aplicando el principio de mínimos cuadrados a este sistema de ecuaciones, resulta el sistema normal equivalente de $(m+n)$ ecuaciones con $(m+n)$ incógnitas (m es el número de ondas P , o mas gráficamente de estaciones, y n es el número de frecuencias en el análisis de Fourier excepto la de referencia. Con la notación de la sección 3.2, $m = NS$ y $n = NF$).

Este sistema escrito para mayor claridad en forma matricial es, considerando que I es la matriz identidad y $\Delta \bar{\omega}^T$ es el vector fila transpuesto de $\Delta \bar{\omega}$,

$$\begin{bmatrix}
 m \bar{I} & -\frac{T_1}{2} \Delta \bar{\omega} & -\frac{T_2}{2} \Delta \bar{\omega} & \dots & -\frac{T_m}{2} \Delta \bar{\omega} \\
 -\Delta \bar{\omega}^t \frac{T_1}{2} & \frac{T_1^2}{4} \Delta \bar{\omega}^2 & 0 & \dots & 0 \\
 -\Delta \bar{\omega}^t \frac{T_2}{2} & 0 & \frac{T_2^2}{4} \Delta \bar{\omega}^2 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \Delta \bar{\omega}^t \frac{T_m}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{T_m^2}{4} \Delta \bar{\omega}^2
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 c f_1 \\
 c f_2 \\
 \vdots \\
 c f_n \\
 Q_1' \\
 \vdots \\
 Q_m'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sum_{i=1}^m \bar{a}_i(n) \\
 -\frac{T_1}{2} \Delta \bar{\omega}^t \bar{a}_1 \\
 -\frac{T_2}{2} \Delta \bar{\omega}^t \bar{a}_2 \\
 \vdots \\
 -\frac{T_m}{2} \Delta \bar{\omega}^t \bar{a}_m
 \end{bmatrix}
 \quad (3-11)$$

Dado que la matriz de coeficientes de las incógnitas presenta muchos términos nulos, $m(m-1)$, los métodos que en principio parecen mas adecuados para la resolución de (3-11) son los de tipo iterativo, como por ejemplo el de Gauss-Seidel. En una primera fase, se intentó la resolución por este método pero no se logró la convergencia del proceso, ya que la matriz de coeficientes de las incógnitas no cumple la condición de dominancia estricta de los términos diagonales: $a_{ii} > \sum_j a_{ij}$ (ver capítulo 3 del libro de Conte y deBoor, 1972).

Por ello, se procedió a la resolución de (3-11) mediante el método de eliminación de Gauss, con pivotamiento parcial a fin de disminuir los errores de redondeo escogiendo en cada paso la ecuación que ha de servir de pivot en el proceso de eliminación.

Basado en este algoritmo de eliminación, se construyó el programa SYSTEQ2Q, cuyo módulo fuente figura en el Apéndice A. Este programa contiene, asimismo, un método de mejora iterativa que da idea, no sólo del buen o mal condicionamiento del sistema bajo estudio, sino también del número de cifras decimales válidas de la solución obtenida.

El fundamento del método de mejora iterativa es el siguiente algoritmo:

Consideremos el sistema lineal $\bar{A} \cdot \bar{X} = \bar{b}$

- . Sea \hat{x} una solución aproximada previamente calculada mediante el método de eliminación de Gauss.
- . Calcular $\bar{r} = \bar{b} - \bar{A} \cdot \hat{x}$, utilizando aritmética de doble precisión.
- . Resolver el sistema lineal $\bar{A} \cdot \bar{e} = \bar{r}$
- . Si $\|e\|/\|x\|$, es suficientemente pequeño (el fenómeno físico considerado debe servir para establecer un criterio adecuado de convergencia), tomar $\hat{x} + \bar{e}$ como la solución buscada.
- . De otro modo, hacer $\hat{x} = \hat{x} + \bar{e}$ y repetir el proceso.

El número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia propuesta, $\|e\|/\|x\| < \epsilon$, nos indica el condicionamiento del sistema ya que es un índice del valor de $\text{cond}(A)$, muy difícil de calcular (1).

En este trabajo, mas que un estudio exhaustivo del condicionamiento del sistema, lo que interesaba era estimar cuál era el número de cifras decimales válidas de la solución, \hat{x} , calculada. En general, si $\|e\|/\|\hat{x}\| \approx 10^{-s}$, podemos concluir que las s primeras cifras decimales de \hat{x} , son probablemente las mismas que las de la solución buscada x , y que $\hat{x} + \bar{e}$ es una aproximación mejor que \hat{x} a x . (Conte y de Boor, 1972).

(1) $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, nos dice la relación que existe entre el error relativo $\|e\|/\|\hat{x}\|$, no determinable y el residuo relativo $\|r\|/\|b\|$ fácilmente computable:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|\hat{x}\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

3.4.2.- Resultados obtenidos

A partir de los espectros de las ondas P registradas en cada estación, se procedió a formar, para cada uno de los tres terremotos, grupos de ondas cuyos ángulos de incidencia en el Moho y de emergencia del foco i_F , difiriesen poco ($\Delta i_F \leq 10^\circ$, $\Delta i_M \leq 5^\circ$); con ello se pretende evitar principalmente y en primera aproximación, la diferente respuesta en frecuencias de la Corteza para rayos con ángulos de incidencia en el Moho muy diferentes.

Los grupos formados fueron:

Terremoto nº 1: (1)-(5), (6)-(12), (13)-(20), (21)-(23), (24)-(29), (30)-(34).

Terremoto nº 2: (2)-(5), (6)-(12), (13)-(19). (3-12)

Terremoto nº 3: (2)-(5), (6)-(14).

- Entre paréntesis figuran los números de cada estación de la tabla 3-2-

Con los resultados de FAF, el programa SYSTEQ2Q calculó, para cada grupo, una solución aproximada del sistema (3-11), así como una estimación del error de dicha solución \bar{e} . Este error, que refleja el buen o mal condicionamiento del sistema, era en promedio del 1% al 10% del valor de la solución calculada.

Aparte de este error que se debe al mal condicionamiento del sistema y cuya disminución sólo es posible mediante un mejor análisis de los datos $\bar{A}(\omega)$, a partir de los que se obtienen los términos independientes de (3-11), existe un segundo tipo de error o más bien dispersión, y que se debe en parte a los datos empleados $\bar{A}(\omega)$, pero también y de modo primordial, al modelo físico empleado y que supone, entre otras simplificaciones, la independencia de Q^{-1} respecto de la frecuencia.

Para calcular cuál es la influencia de la frecuencia en nuestro método, se procedió a la resolución de los sistemas de ecuaciones co-

respondientes a cada grupo, variando la frecuencia de referencia o patrón ω_p , entre la mínima y máxima consideradas en el análisis de Fourier y que figuran en la tabla 3-1.

El número de sistemas resueltos de este modo fué:

Terremoto nº 1: 6 grupos \times 4 frecuencias de referencia = 24

Terremoto nº 2: 3 grupos \times 4 frecuencias de referencia = 12

Terremoto nº 3: 2 grupos \times 3 frecuencias de referencia = 6

Es decir, fueron necesarias un total de 42 ejecuciones de SYSTEQ2Q, con un promedio de 10 iteraciones para alcanzar la convergencia - que se estableció en $\epsilon = 0,1$, ya que dados los datos de que se disponía y los errores cometidos con las simplificaciones de efecto de Corteza y otros, no era razonable exigir mayores precisiones.

Los resultados obtenidos, se muestran en la tabla 3-3(a),(b) y (c), en la que figuran los valores medios y las desviaciones típicas del conjunto de valores de Q_α^{-1} y $T.Q_\alpha^{-1}$ para cada onda P estudiada, y obtenidos al variar ω_p . Puede verse que estos valores muestran una considerable dispersión para varias estaciones (para las ondas registradas en ellas) que se han señalado en dicha tabla con un asterisco y para las que no figura el valor de $T.Q_\alpha^{-1}$ correspondiente. Como nuestro modelo supone la independencia de la función de disipación específica respecto de la frecuencia, se descartarán en lo sucesivo los resultados con dispersión grande.

En la figura 3-4, se representan los valores de $Q_\alpha^{-1}(\Delta)$ para las ondas P que en la tabla 3-3 figuran sin asterisco. La figura 3-5, muestra los valores correspondientes de $T.Q_\alpha^{-1}(\Delta)$, que serán utilizados en el próximo capítulo para la determinación del factor de calidad, Q, intrínseco del Manto. Esta figura presenta bastante semejanza con la obtenida por Mikumo y Kurita (1967) para $T.Q_\alpha^{-1}(\Delta)$. Si se ajustan los puntos de dicha figura por un polinomio de grado tres, por ejemplo, la

TABLA 3-3. Valores de $Q_a^{-1}(\Delta)$, $TQ_a^{-1}(\Delta)$ y sus desviaciones típicas, obtenidas de SYSTEQ2Q.

(a) TERREMOTO N° 1 ($E-n = 10^{-n}$)

Estación	Q_a^{-1}	$\sigma(Q_a^{-1})$	$T \cdot Q_a^{-1}$	$\sigma(T \cdot Q_a^{-1})$
BHP	0,12 . E-1	0,17 . E-2	2,79	0,40
CAR	0,81 . E-2	0,21 . E-3	1,91	0,50
PEL	0,76 . E-2	0,15 . E-2	2,05	0,41
SJG	0,50 . E-2	0,13 . E-2	1,51	0,40
LPA	0,58 . E-2	0,64 . E-3	1,81	0,19
* CHG	0,58 . E-2	0,44 . E-2		
BEC	0,40 . E-2	0,70 . E-3	1,68	0,29
SHA	0,36 . E-2	0,12 . E-2	1,54	0,51
SOM	0,41 . E-2	0,46 . E-3	1,78	0,21
ATL	0,22 . E-2	0,88 . E-3	0,97	0,39
OXF	0,32 . E-2	0,96 . E-3	1,46	0,44
GEO	0,13 . E-2	0,26 . E-3	0,61	0,13
SCP	0,20 . E-2	0,21 . E-3	0,97	0,10
FLO	0,20 . E-2	0,20 . E-3	0,98	0,11
WES	0,36 . E-2	0,20 . E-3	1,77	0,11
AAM	0,14 . E-2	0,21 . E-3	0,70	0,10
ALQ	0,29 . E-2	0,23 . E-3	1,50	0,11
TUC	0,43 . E-2	0,57 . E-3	2,25	0,29
GOL	0,46 . E-2	0,56 . E-3	2,47	0,30
RCD	0,35 . E-2	0,81 . E-4	1,96	0,05
COR	0,31 . E-2	0,10 . E-3	2,15	0,17
LON	0,29 . E-2	0,12 . E-3	1,81	0,08
* PTO	0,64 . E-2	0,22 . E-2		
TOL	0,25 . E-2	0,27 . E-3	1,66	0,18
VAL	0,13 . E-2	0,25 . E-3	0,87	0,17
* SPA	0,47 . E-2	0,30 . E-2		
CMC	0,39 . E-2	0,28 . E-3	2,67	0,19
WIN	0,40 . E-2	0,32 . E-3	2,78	0,20
NOR	0,40 . E-2	0,39 . E-3	2,95	0,30
PRE	0,51 . E-2	0,42 . E-3	3,73	0,32
BUL	0,50 . E-2	0,41 . E-2	3,73	0,41
IST	0,60 . E-2	0,60 . E-3	4,68	0,50

TABLA 3-3 (Continuación)

(b) TERREMOTO N° 2

Estación	Q_{α}^{-1}	$\sigma(Q_{\alpha}^{-1})$	$T \cdot Q_{\alpha}^{-1}$	$\sigma(T \cdot Q_{\alpha}^{-1})$
CTA	0,45 . E-2	0,58 . E-3	1,53	0,19
RAB	0,23 . E-2	0,58 . E-3	0,79	0,20
PMG	0,23 . E-2	0,61 . E-3	0,82	0,21
GUA	0,85 . E-3	0,21 . E-3	0,404	0,10
* BAG	0,72 . E-2	0,41 . E-2		
LEM	0,45 . E-2	0,48 . E-3	2,80	0,30
* HKC	0,11 . E-1	0,72 . E-2		
* GSC	0,89 . E-3	0,71 . E-3		
* SNG	0,10 . E-1	0,47 . E-2		
* TUC	0,11 . E-1	0,56 . E-2		
* LON	0,61 . E-2	0,22 . E-2		
ALQ	0,37 . E-2	0,42 . E-3	2,82	0,31
* COL	0,86 . E-2	0,31 . E-2		
* CHG	0,54 . E-2	0,32 . E-2		
* SHL	0,1 . E-1	0,6 . E-2		
LPA	0,40 . E-2	0,52 . E-3	3,06	0,40
OXF	0,42 . E-2	0,64 . E-3	3,12	0,49

(c) TERREMOTO N° 3

* WES	0,83 . E-2	0,39 . E-2		
BEC	0,17 . E-2	0,38 . E-3	1,08	0,25
GEO	0,40 . E-2	0,71 . E-3	2,38	0,43
FLO	0,65 . E-3	0,70 . E-4	0,40	0,051
CAR	0,11 . E-2	0,21 . E-3	0,80	0,15
RCD	0,59 . E-3	0,16 . E-3	0,44	0,11
BAG	0,19 . E-2	0,25 . E-3	1,38	0,19
DAL	0,22 . E-2	0,28 . E-3	1,68	0,22
COR	0,37 . E-2	0,25 . E-3	2,86	0,20
* BOG	0,56 . E-2	0,20 . E-2		
ALQ	0,15 . E-2	0,46 . E-3	1,17	0,37

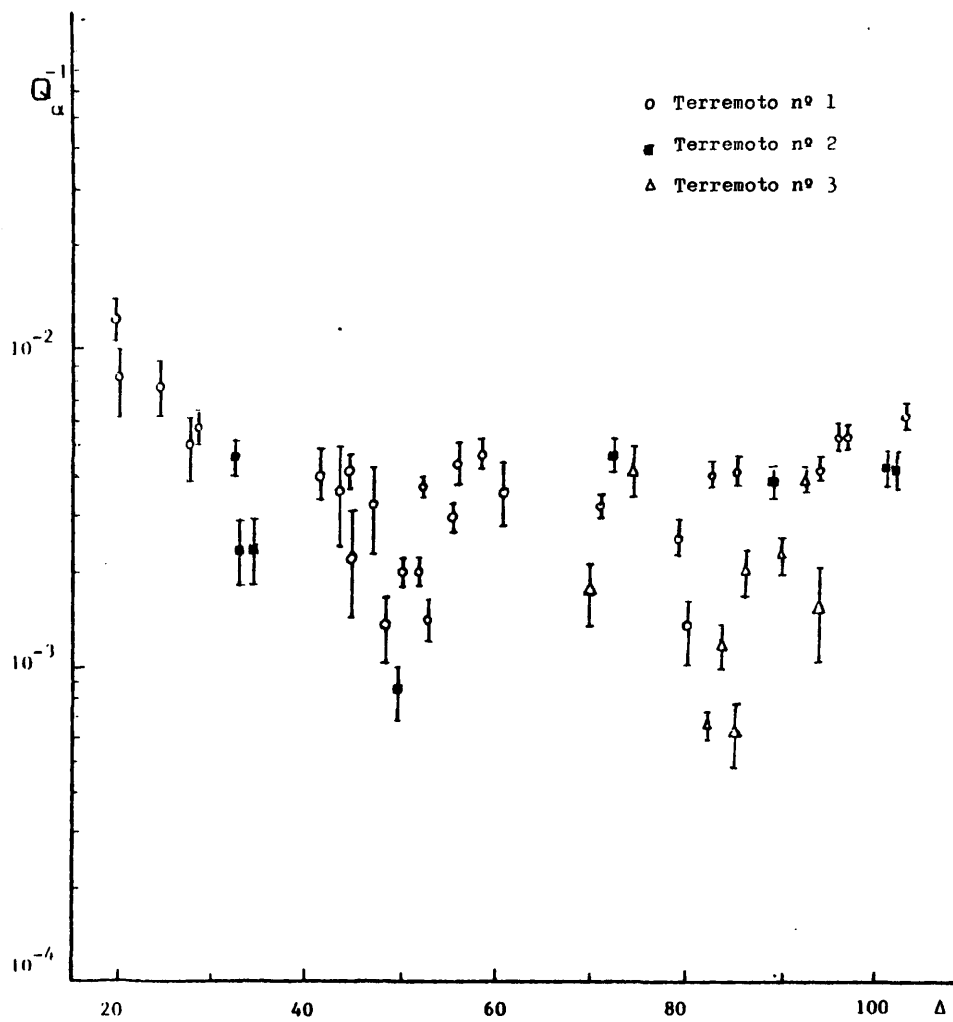


Figura 3-4. Valores calculados de las funciones de disipación específica, $Q_{\alpha}^{-1}(\Delta)$ y sus correspondientes desviaciones, para las ondas P estudiadas.

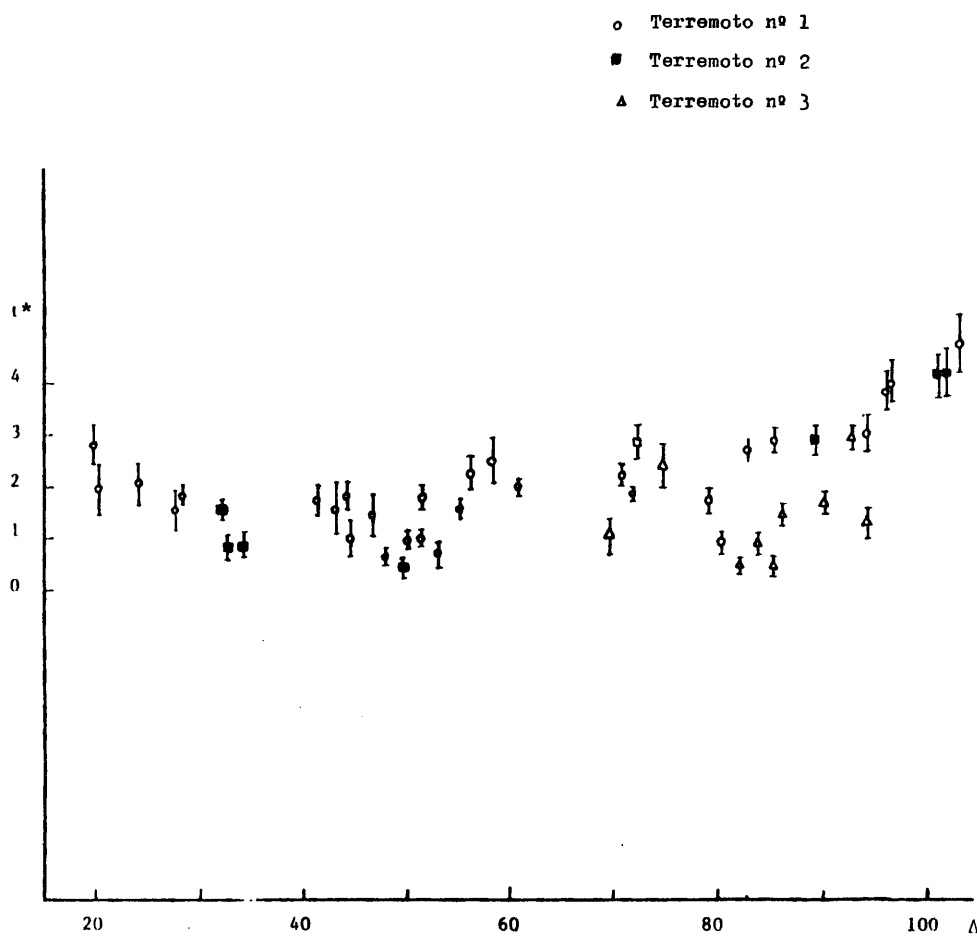


Figura 3-5. Variación de $t^* = TQ^{-1}$, con la distancia epicentral Δ para las ondas P estudiadas.

curva que resulta es ligeramente descendente hasta los 30°, después se mantiene casi paralela al eje X, con un valor constante de $t_u^* = T \cdot Q_u^{-1}$, entre los 30° y los 75° y a partir de este valor, asciende nuevamente. Anderson y Hart (1978) emplean esta aparente constancia de t_u^* entre los 30° y 80°, como ligadura en su modelo realizado con resultados de ondas superficiales y oscilaciones libres.

Aun cuando se salga algo de la línea del método de cálculo, es interesante señalar que mediante un sencillo programa REGRES, de ajuste mediante una recta de mínimos cuadrados, se realizó el ajuste de $\ln \frac{A''(\omega_j)/A''(\omega_p)}{A''(\omega_j)/A''(\omega_p)}$, respecto a $4\omega = \omega_j - \omega_p$, cuya pendiente para una determinada ω_p nos da, siguiendo el trabajo ya mencionado de Mikumo y Kurita, el valor de $\frac{1}{2} T_p Q_p^{-1} - \frac{1}{2} T_r Q_r^{-1}$. El motivo no era otro que el de poder confirmar las dispersiones y ver si los valores que SYSTEQ2Q calculaba para $T_{p,r}$ cumplían las relaciones del ajuste por rectas. El acuerdo obtenido fue notable y para el terremoto número 2, el ajuste por rectas producía dispersiones tan considerables como las de la tabla 3-3(b). Es de suponer que para dicho terremoto se necesitaría una depuración de los datos e hipótesis de trabajo mayor de la realizada en este trabajo.

Las dispersiones apreciables obtenidas en casi todos los valores muestran uno de los aspectos de la dificultad de obtención de factores Q mediante ondas internas. A la hora de intentar explicarlas, existen varias razones bastante evidentes. El modelo empleado efectúa simplificaciones, en particular, parece muy aconsejable para mejorar los resultados, considerar cuidadosamente la respuesta de la Corteza para cada estación de un modo explícito. Un segundo efecto importante es debido a errores en los datos $A(\omega)$, ya que el número de puntos del análisis de Fourier que se han tomado para cada estación es muy pequeño (5 ó 4), por lo que cualquier error apreciable en alguno de ellos repercutirá sensiblemente en las soluciones del sistema (3-11) cuyo

condicionamiento es malo. Hay que señalar que éste segundo efecto, que podríamos llamar de limitación del análisis de Fourier, está unido al efecto anterior de no consideración de modo explícito de la respuesta de la Corteza, y que nos hacía trabajar en el rango reducido de frecuencias de la tabla 3-1, por las razones ya dichas en la sección 3.2.

Si una vez mejorado el modelo físico y matemático del proceso, la dispersión en los resultados de $Q_{\alpha}^{-1}(\Delta)$, para distintas frecuencias de referencia, sigue siendo importante, puede ser conveniente plantearse la cuestión de la dependencia de Q_{α}^{-1} respecto de la frecuencia. Esta importante complicación del modelo obligaría a revisar todos los métodos de cálculo de Q^{-1} mediante ondas internas.

C A P I T U L O 4

DISTRIBUCION DE Q_x CON LA PROFUNDIDAD EN EL MANTO

4.1.- INTRODUCCION

El propósito final del estudio de factor de calidad Q , es encontrar las propiedades anelásticas intrínsecas de la Tierra como evidencia del estado físico y químico de los materiales de su interior. Como se indicó en el capítulo 2, se han realizado diversos esfuerzos a fin de obtener distribuciones de Q con la profundidad, mediante el análisis de ondas internas. En conjunto, los resultados de distintos autores no muestran entre sí mucha consistencia, lo que indica de modo claro la dificultad de este problema de inversión.

El problema que se afronta en este capítulo es el de la obtención de Q_x a distintas profundidades en el Manto terrestre, realizando para ello un número mínimo de hipótesis. Se insiste de modo especial, en el análisis de los errores en cada uno de los distintos pasos del proceso, por considerar estos tan importantes como el valor medio correspondiente, que sin su desviación típica carece casi por completo de sentido físico. A este respecto, resulta curioso que en la literatura sobre este tema, muy pocos autores hayan realizado una estimación de los errores de sus resultados (Berzon et al., 1972, lo efectúan para los valores de Q_x en el Manto Superior e Inferior, analizando un gran número de terremotos), cuando la notable discrepancia de los valores de Q de diferentes autores - ver tablas 2-1 y 2-2 -, indica que éste es un proceso de cálculo con márgenes de error muy apreciables.

En la figura 4-1, se muestra el diagrama de flujo del proceso de cálculo que conduce finalmente a una distribución intrínseca de Q_x con sus desviaciones: $Q_x(r)$ y $\sigma(Q_x(r))$, en las regiones en que se divide el Manto.

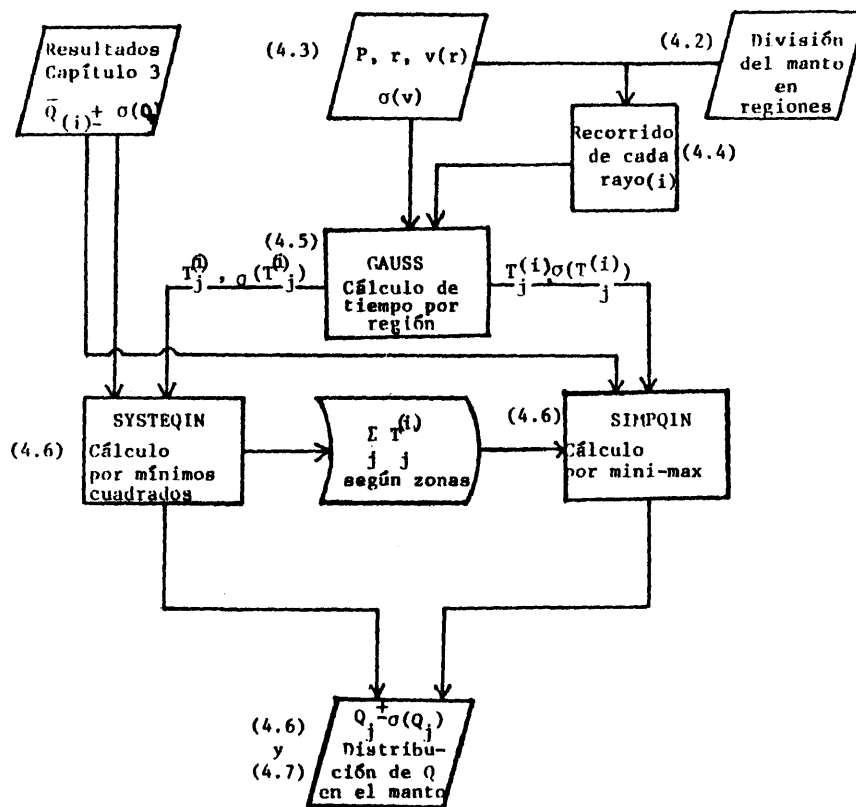


Figura 4-1 Diagrama de flujo del proceso del cálculo del capítulo 4, empleado para la obtención de $Q(r_i)$.

4.2.- METODO DE CALCULO EMPLEADO.

En el capítulo anterior se obtuvieron unos factores medios de disipación específica $Q_{\alpha}^{-1}(\Delta)$, para cada terremoto y para cada onda P, que son los que figuran en la tabla 3-3 (a), (b) y (c), junto con sus desviaciones típicas y que se representaron en la figura 3-4.

Para derivar una distribución de Q con la profundidad en el Manto, debemos resolver la ecuación integral que relaciona $T.Q_{\alpha}^{-1}(\Delta)$ con $Q(r)$:

$$(TQ^{-1})_i = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{ds}{Q(r)v(r)} = 2 \int_{r_f}^{r_{\min}} \frac{\eta^2}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \frac{|dr|}{Q(r)} + \int_{r_f}^{r_{\sup}^{(i)}} \frac{\eta^2}{r\sqrt{\eta^2 - p^2}} \frac{dr}{Q(r)} \quad (4-1)$$

Las r son coordenadas radiales esféricas, cuyo origen es el centro de la Tierra, correspondiendo r_f , r_{\min} y r_{\sup} , al foco, punto más profundo de la trayectoria del rayo i al punto en la superficie terrestre (correspondiente a la estación i) y siendo $\eta = r/v$.

La resolución analítica de (4-1), puede realizarse para el caso de terremotos superficiales, - en los que el segundo término del segundo miembro se hace igual a cero, ya que se supone $r_f = r_{\sup}$ -, realizando simplificaciones al considerar la distribución de la velocidad con la profundidad. Para un estudio de este tema se puede consultar el trabajo de Sato y Espinosa (1967).

En nuestro caso, se parte del hecho de que toda ecuación integral puede discretizarse reduciéndola a un conjunto de sumas. Si dividimos la Tierra en zonas radiales, tal que la zona j esta comprendida entre r_{j-1} y r_j , se puede poner la integral como:

$$\left(\frac{T}{Q}\right)_i^{(u)} = \sum_j \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{ds}{Q(r)v(r)} = \sum_j \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{dt}{Q(r)} \quad (4-2)$$

siendo $\Omega(1,2 \text{ ó } 3)$ el terremoto considerado.

Si ahora suponemos que en cada zona, j , existe una disipación constante Q_j^{-1} , la ecuación (4-2) se transforma en:

$$\left(\frac{T}{Q_n} \right)_i^{(\Omega)} = \sum_j Q_j^{-1} T_j(p_i^{(\Omega)}) \quad (4-3)$$

$$= \sum_j Q_j^{-1} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{r^2}{r \sqrt{r^2 - p_i^{(\Omega)2}}} dr \quad (4-4)$$

donde p_i es el parámetro de la onda i , j representa la zona y Ω el terremoto considerado (1, 2 ó 3). $T_j(p_i)$ es, por tanto, el tiempo de permanencia de la onda sísmica i del terremoto Ω en la zona j .

La resolución de este sistema, superdeterminado si el n° de ondas P consideradas es mayor que el número de zonas en que se divide la Corteza y el Manto, presenta la dificultad fundamental de que los coeficientes de las incógnitas Q_j^{-1} , contienen datos experimentales con sus desviaciones típicas correspondientes ($\eta = r/v$, exige el empleo de una distribución de velocidades con sus desviaciones). Asimismo, los términos independientes $(T \cdot Q_n^{-1})_i$, presentan desviaciones considerables como se vió en el capítulo anterior.

Un procedimiento de resolución parecido, mediante solución directa de sistemas como el (4-3), llevo a Sato y Espinosa (1967) a un sistema mal condicionado no consiguiendo resultados numéricos. Ello se debió a que utilizaron para su estudio relaciones espectrales de ondas múltiplemente reflejadas por la frontera Manto-Núcleo, con lo que los coeficientes temporales de las Q_j^{-1} eran prácticamente iguales para las diferentes fases SoS, 2 SoS, 3 SoS etc. estudiadas.

4.3.- DIVISION DE LA CORTEZA Y EL MANTO EN REGIONES

El primer paso en la resolución del sistema (4-3), es efectuar una división de la Corteza y el Manto en regiones, así como disponer de una distribución de velocidades con la profundidad.

Evidentemente y antes de efectuar ningún cálculo, se puede aventurar que a partir de unos términos independientes $(T \cdot Q_n^{-1})_i$, como

los de la ecuación (4-3) cuyas desviaciones típicas son importantes, no se va a poder obtener una distribución $Q(r)$ muy detallada. Como lo que se intenta, primordialmente, es encontrar los valores de Q , con sus desviaciones, en zonas de interés para la Sismología: zona de bajas velocidades de las ondas transversales del Manto Superior, zona de transición del Manto Superior y la frontera Manto-Núcleo, se procedió a dividir la Corteza y el Manto en 10 regiones, que figuran en la tabla 4-1 y que coinciden o están incluidas en las zonas A, B, C y D de Bullen (1963).

TABLA 4-1 Regiones consideradas en la Corteza y el Manto

Nº Región	Límites $r, (R_T - r) (*)$ (Km.)	Características según Bullen	Atenuaciones previstas de las ondas internas.
	6371 (0)		
1	6331 (40)	<u>E</u> stru <u>t</u> ura <u>e</u> n <u>c</u> apas	
2	6211 (160)	Gradiente de velocidades de ondas P constante y positivo	Altas, según modelo MM8 de Anderson et al.(1965)
3	5971 (400)	- - - - -	
4	5771 (600)	Región de transición	Disminución gradual
5	5571 (800)	- - - - -	
6	5371 (1000)	Manto Inferior. Gradientes de velocidades de on	Inferiores en un orden de magnitud a las del
7	4971 (1400)	das P casi constantes y positivo	Manto Superior
8	4371 (2000)		
9	3971 (2400)	Zona más profunda	Aumento sensible (Miku-
10	3596 (2885)	Frontera Manto-Núcleo	mo y Kurita, 1967; Teng, 1968)

(*) R_T es el radio de la Tierra.

El cálculo de los tiempos T_{ij} del sistema (4-3), exige el empleo de un modelo de distribución de velocidades de ondas P con la profundidad. En este trabajo nos basamos en el modelo CAL511A de Bolt y Uhrhammer (1975). Los clasicos de Gutenberg, que figura en Handbook of Physical Constants (1966), y de Bullen (1963), junto con las diferencias Δv_p , de distintos autores, que se encuentran en el libro de Robertson (1972), sirvieron para establecer las desviaciones a los valores de CAL511A. Con ello se pretende dar, no solo un valor para cada profundidad $v(r)$, sino también su desviación standard $\sigma(v)$, deducida del conjunto de esos valores.

En la tabla 4-2 figuran los valores empleados para v , los correspondientes de $\eta = r/v$, y las desviaciones típicas respectivas.(1). También se han representado las diferencias divididas que servirán para la interpolación en dicha tabla. Se ve claramente que las diferencias primeras están ya prácticamente estabilizadas, por lo que entre dos valores de la tabla bastará una interpolación lineal. Las diferencias segundas son menores que las desviaciones debidas a los errores de los datos de que proceden, por lo que su consideración sólo conduce a resultados erróneos. En la tabla 4-2 únicamente se han representado a efectos demostrativos aquellas diferencias segundas de mayor magnitud, junto con sus desviaciones y se puede ver como éstas son del mismo orden o superior.

(1) Evidentemente:

$$\sigma^2(r/v) = \left(\frac{\partial(r/v)}{\partial v} \right) \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial(r/v)}{\partial r} \right) \sigma_r^2$$

como se supone $\sigma_r = 0$

$$\sigma^2\left(\frac{r}{v}\right) = \left(-\frac{r}{v^2}\right)^2 \sigma_v^2 \Rightarrow \frac{\sigma^2\left(\frac{r}{v}\right)}{\left(\frac{r}{v}\right)^2} = \frac{\sigma_v^2}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2$$

es decir, igualdad de varianzas o desviaciones relativas.

TABLA 4-2 Distribución con la profundidad de v, η (r/v), sus desviaciones típicas y las diferencias divididas de $\eta(r)$. (r = distancia al centro de la Tierra.)

r (Km)	$v(\sigma_v)$ (Km/s)	$\eta(\sigma_\eta)$ (s)	$\eta'[\sigma_{\eta'}]$ (Km ⁻¹ .s)	$\eta''[\sigma_{\eta''}]$ (Km ⁻² .s)
6371	4,30(0,01)	1481,6 (3)	0,2 (0,6)	
6361	4,30(0,01)	1479,3 (3)		
6361	7,50(0,02)	848,10 (2)	0,2 (0,4)	
6351	7,50(0,02)	846,8 (2)		
6351	7,95(0,02)	798,87 (2)	0,25 (0,2)	
6291	8,03(0,1)	783,44 (8)	0,05 (0,25)	
6251	8,00(0,02)	781,30 (2)	0,38 (0,1)	
6211	8,11(0,02)	765,84 (2)	0,37 (0,1)	0,0002 (0,0004)
6071	8,51(0,05)	713,40 (5)	0,56 (0,15)	0,0078 (0,009)
5971	9,08(0,02)	657,60 (10)		
5971	9,43(0,22)	633,29 (11)	0,31 (0,23)	
5871	9,74(0,2)	602,87 (12)	0,29 (0,23)	
5731	10,20(0,21)	561,86 (11)		
5731	10,52(0,2)	554,77 (11)	0,55 (0,20)	
5671	10,88(0,2)	521,23 (10)	0,20 (0,15)	
5571	11,10(0,1)	501,89 (5)	0,17 (0,08)	
5471	11,29(0,05)	484,69 (3)	0,16 (0,06)	0,00005 (0,0008)
5371	11,46(0,05)	468,67 (3)	0,150 (0,02)	0,00003 (0,00023)
5171	11,79(0,02)	438,59 (1)	0,133 (0,005)	0,00004 (0,00015)
4971	12,07(0,02)	411,85 (1)	0,124 (0,005)	0,00002 (0,0002)
4771	12,33(0,02)	386,94 (1)	0,113 (0,004)	0,000018(0,000016)
4371	12,80(0,02)	341,48 (0,7)	0,1045(0,004)	0,000012(0,00001)
3971	13,25(0,03)	299,70 (1)	0,1006(0,005)	0,000005(0,00001)
3671	13,62(0,02)	269,53 (0,5)	0,085 (0,012)	0,000039(0,00004)
3591	13,67(0,02)	262,69 (0,5)	0,04 (0,04)	
3521	13,54(0,10)	260,04 (2,5)	-0,02 (0,03)	
3486	13,37(0,11)	260,73 (2,5)		

4.4.- RECORRIDO DE LAS ONDAS P

Una vez se posee una división del Manto en regiones, se puede ver cual es el recorrido de cada una de las ondas P registradas en las distintas estaciones, en términos de las regiones de la tabla 4-1, atravesadas por dicha onda a lo largo de toda su trayectoria, desde el foco a la estación.

El punto más profundo de la trayectoria de un rayo sísmico de parámetro p , viene dado por

$$p = (r/v)_{\min} = \eta_{\min} \quad (4-5)$$

con este valor de $(r/v)_{\min}$, podemos entrar en la tabla 4-2 y mediante interpolación calcular el valor correspondiente de r_{\min} .

Si $(r/v)_{r=r_j} > (r/v)_{r=r_{\min}}$, siendo el valor de la tabla más próximo a (4-5), se tiene que:

$$\eta_{r=r_{\min}} = \eta_j + (r_{\min} - r_j) \eta' [r_{j+1}, r_j] + \text{términos de orden } 2 \left(\frac{1}{2} (r_{\min} - r_j)^2 \eta'' [r_{j+1}, r_j] \right) \quad (4-6)$$

así pues, de (4-6) obtenemos r_{\min} y con ello, cuales han sido las regiones atravesadas por la onda de parámetro p .

En las tablas 4-3 (a), (b) y (c), figuran las estaciones, parámetros p , profundidades máximas y recorridos efectuados por las ondas P que llegan a dichas estaciones, para cada uno de los tres terremotos estudiados. En la columna correspondiente a recorrido, se señalan las distintas regiones en el orden en que son atravesadas estando subrayada la más profunda.

TABLA 4-3 Recorrido de las distintas ondas P registradas.

(a) TERREMOTO N° 1 ($r_F = 5788$ Km; $\eta_F = 578 \pm 11$ s ; $v_F = 10,0 \pm 0,2$ Km/s)

Estación	p (s)	r_{min} (km)	Recorrido
BHP	541,4	570,5	4, <u>5</u> ,4,3,2,1
CAR	537,8	5699,7	"
PEL	521,7	5670,5	"
SJG	507,9	5604,0	"
LPA	505,5	5592,0	"
CHG	476,3	5418,7	4,5, <u>6</u> ,5,4,3,2,1
BEC	464,6	5343,7	4,5,6, <u>7</u> ,6,5,4,3,2,1
SHA	461,6	5323,8	"
SOM	458,6	5303,9	"
ATL	455,5	5283,3	"
OXF	446,0	5220,2	"
GEO	439,5	5177,0	"
OGD	429,5	5102,6	"
SCP	429,5	5102,6	"
FTO	426,2	5077,8	"
WES	426,0	5076,2	"
AAM	419,3	5025,9	"
ALQ	408,7	4946,1	4,5,6,7, <u>8</u> ,7,6,5,4,3,2,1
TUC	405,1	4917,2	"
GOL	397,8	4858,5	"
RCD	386,8	4769,8	"
COR	343,8	4390,9	4,5,6,7,8, <u>9</u> ,8,7,6,5,4,3,2,1
LON	339,7	4354,0	"
PTO	319,0	4155,9	"
TOL	310,6	4075,5	"
VAL	305,3	4024,8	"
SPA	302,0	3993,2	"
CMC	293,4	3908,4	4,5,6,7,8,9, <u>10</u> ,9,8,7,6,5,4,3,2,1
WIN	284,6	3820,1	"
NOR	266,9	3640,1	"
PRE	"	"	"
BUI.	"	"	"
IST	262,4	3587,1	"

TABLA 4-3 (Continuación)

- 60 -

(b) TERREMOTO N° 2 ($r_F = 5745$ Km; $v_F = 10,1 \pm 0,2$ Km/s; $\eta_F = 566 \pm 11$ s)

Estación	p(s)	r_{min} (Km)	Recorrido
HNR	513,2	5630,85	<u>5</u> , 4, 3, 2, 1
CTA	482,8	5459,11	5, <u>6</u> , 5, 4, 3, 2, 1
RAB	482,8	5455,97	5, <u>6</u> , 5, 4, 3, 2, 1
PMG	478,1	5429,55	5, <u>6</u> , 5, 4, 3, 2, 1
CUA	425,4	5071,83	5, 6, <u>7</u> , 6, 5, 4, 3, 2, 1
BAG	340,0	4356,84	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
LEM	332,1	4281,24	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
HKC	308,4	4054,44	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
GSC	293,4	3908,44	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
SNG	285,7	3831,97	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
TUC	282,3	3798,21	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
LON	279,7	3772,39	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
ALQ	269,3	3668,29	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
COL	267,6	3648,29	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
CHG	267,6	3648,29	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
SHI.	258,8	Frontera	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
CMC	257,1	Manto	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
LPA	257,1	Núcleo	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
OXF	257,1	"	5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

(c) TERREMOTO N° 3

QUE	481,0	5447,8	2, 3, 4, 5, <u>6</u> , 5, 4, 3, 2, 1
WES	353,4	4675,1	2, 3, 4, 5, 6, 7, <u>8</u> , 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
BEC	348,5	4632,1	2, 3, 4, 5, 6, 7, <u>8</u> , 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
GEO	331,4	4274,5	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
TRN	309,0	4060,2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
MNN	307,8	4048,7	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
FLO	296,5	3939,2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
CAR	291,4	3888,5	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
RCD	285,1	3826,0	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
BAG	282,5	3800,1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
DAL	282,5	3800,1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
COR	264,6	3613,0	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
BOG	263,4	3598,9	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
ALQ	255,6	3576,2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, <u>9</u> , <u>10</u> , 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

4.5.- CALCULO DE LOS TIEMPOS DE PERMANENCIA EN CADA REGION

El sistema superdeterminado (4-3) tiene como coeficientes de las incógnitas Q_j^{-1} (disipaciones intrínsecas en la región j), los tiempos $T_j(p_i)$, de permanencia de cada rayo de parámetro p_i en dichas regiones. A continuación se efectúa su cálculo.

Consideremos el rayo sísmico representado por su parámetro p_i , del terremoto \mathcal{R} - rayos sísmicos de igual parámetro son indistinguibles en este cálculo al no considerar variaciones laterales en el Manto -. Si, para simplificar, eliminamos el índice \mathcal{R} del terremoto, suponiendo que se trabaja con uno cualquiera de los tres

$$T_j(p_i) = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{\eta^2}{r \sqrt{\eta^2 - p^2}} dr \quad (4-7)$$

En la figura 4-2, se puede ver el significado de r_j y r_{j-1} .

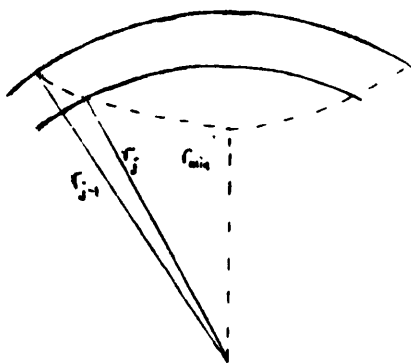


Figura 4-2

Esta integral presenta una singularidad en el punto mas profundo de su trayectoria, $r = r_m$, ya que en dicho punto $\eta = p_i$. Un modo de resolver dicho problema es efectuar el siguiente cambio de variables (Mikumo y Kurita, 1967): $\zeta = \eta \frac{dr}{dr}$, con lo que

$$T_j(p_i) = \int \frac{d \sqrt{\eta^2 - p^2}}{1 - \zeta} \quad (4-7')$$

no obstante, el tratamiento de esta integral, por los métodos del análisis numérico, resulta muy laborioso por la necesidad de crear nuevas tablas de diferencias divididas de φ y $\sqrt{\eta^2 - p^2}$, para cada rayo.

En este trabajo, se prefirió seguir el camino mas directo. Para cada rayo, conocemos su trayectoria según figura en la tabla 4-3; como, salvo en la región mas profunda, no existen singularidades, se procede al cálculo de los tiempos en cada una de las regiones excepto la mas interna.

El valor del tiempo en esta región, lo podemos calcular fácilmente, a partir del tiempo total de recorrido T_1 del rayo p_1 , que figura en la tabla 3-2, y de los tiempos $T_j(p_1)$ calculados según (4-7) para el resto de las regiones.

$$T(p_i) = \sum' T_j(p_i) + T_{min}(p_i) \quad (4-8)$$

donde el apóstrofe indica que la suma se efectúa excluyendo la región mas interna. Así pues:

$$T_{min}(p_i) = T(p_i) - \sum' T_j(p_i) \quad (4-9)$$

4.5.1.- Integración por Gauss

El cálculo de la integral (4-7) puede realizarse por alguno de los métodos de integración numérica conocidas. De todos ellos, el mas preciso a igualdad en el número de puntos, n , empleados para su cálculo, es el método de la cuadratura de Gauss, que a diferencia de otros - trapezoidal, Simpson, Pilon -, no realiza la integral a intervalos equidistantes seleccionando los n puntos de antemano, sino que éstos vienen determinados por el mismo método (Conte y deBoor, 1972; capítulo 5).

Según dicho método

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \quad (4-10)$$

siendo $x_k = \frac{(b-a)}{2} t_k + \frac{(a+b)}{2}$, donde t_k es la raíz k del polinomio de

Legendre de grado $n+1$ ($k=0, 1, \dots, n$), y

$$w_k = \frac{1}{2 F'(t_k)} \int_{-1}^1 \frac{F(t_k)}{t-t_k} dt ; \text{ y } F(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$$

Los valores de t_k y w_k están tabulados en la mayoría de los libros de análisis numérico, como el mencionado de Conte y deBoor. Los $n+1$ puntos x_k son tales, que la precisión obtenida en (4-10), es la máxima posible con ese número de puntos.

Se emplearon 5 puntos por región dado que el integrando, $\frac{\eta^2}{r\sqrt{\eta^2-r^2}}$, es una función de comportamiento suave en todas las regiones excepto la mas profunda, en la que presenta una singularidad.

En la tabla 4-4, están los valores de t_k y w_k para $n=4$. En la tabla 4-5, los valores de $r_j(t_k)$ y $\eta_j(t_k)$ en cada una de las nueve primeras regiones ($r_j(t_k) = \frac{(r_j-r_{j-1})}{2} t_k + \frac{(r_j-r_{j-1})}{2}$). Con éste valor de $r_j(t_k)$ podemos obtener $\eta_j(t_k)$, por interpolación en la tabla 4-2. Entónces, estamos en disposición de evaluar

$$T_j(r) = \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{\eta^2}{r\sqrt{\eta^2-r^2}} dr = (r_j-r_{j-1}) \sum_{k=0}^4 w_k \left[\frac{\eta_j}{r_j\sqrt{\eta_j^2-r_k^2}} \right] \quad (4-11)$$

siendo

$$\frac{\eta_j}{r_j\sqrt{\eta_j^2-r_k^2}} = \frac{\eta_j}{r_j\sqrt{\eta_j^2-r_k^2}}$$

4.5.2.- Análisis de errores.

Los errores en el cálculo de la integral (4-7) pueden ser de dos tipos, ya mencionados al comienzo del capítulo 3:

a) Errores de truncación, debidos a discretización en el proceso integral al tomar sólo cinco puntos por región.

Este error es igual (Udias, 1969)

$$\epsilon_n = \left[\frac{(n!)^2}{(2n!)^2} \right] \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \int_{-1}^1 \frac{f^{(2n+1)}(\theta)}{2n} d\theta, \quad -1 < \theta < 1$$

éstos errores, teniendo en cuenta los valores de $f(\theta)$, son totalmente despreciables frente a los errores provenientes de los datos.

b) Errores debidos a los datos.

TABLA 4-4

$n=4$	t_k	w_k
	-0,90618	0,118464
	-0,538469	0,239315
	0	0,284444
	0,538469	0,239315
	0,906180	0,118464

TABLA 4-5 Valores de $r_j(t_k)$ (Km) y $\eta_j(t_k)$ (s), para las distintas regiones (1)

Región	r_1	η_1	r_2	η_2	r_3	η_3	r_4	η_4	r_5	η_5
1	6369,12	1480,6	6361,77	1479,8	6351,0	798,9	6340,23	796,3	6332,88	794,
2	6325,37	791,6	6303,31	787,1	6271,0	782,0	6238,69	780,4	6216,63	767,
3	6199,74	761,7	6155,62	745,5	6091,0	721,6	6026,38	688,0	5982,26	663,
4	5961,62	630,2	5924,85	618,7	5871,0	602,8	5817,15	586,4	5780,38	576,
5	5761,62	571,3	5724,85	551,6	5671,0	521,2	5617,15	510,2	5580,38	502,
6	5561,62	500,4	5524,85	494,2	5471,0	484,7	5417,15	476,4	5380,38	470,
7	5352,24	466,2	5278,69	455,2	5171,0	438,6	5063,31	424,7	4989,76	414,
8	4942,24	408,4	4832,54	394,8	4671,0	375,7	4509,50	357,4	4399,15	345,
9	3446,61	339,0	4278,69	331,4	4171,0	320,2	4063,31	309,0	3989,76	301,

- (1) En la tabla 5 no figuran los valores correspondientes a la región 10, ya que, según el método empleado, nunca se realiza la integración en la región más profunda del recorrido de cada rayo.

Para realizar un cálculo del error debido a las dispersiones en los datos utilizados, en particular las de las velocidades que en la tabla 4-2, venían representadas por sus desviaciones típicas; y las correspondientes en $\eta = r/v$, que representamos por σ_η , se calcula el valor del integrando de (4-11), $f(\eta + \sigma_\eta)$:

$$f(\eta + \sigma_\eta) = \frac{(\eta + \sigma_\eta)^2}{r \sqrt{(\eta + \sigma_\eta)^2 - p^2}}$$

desarrollando en serie y despreciando términos de orden 2 en σ_η

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\eta^2 + 2\eta\sigma_\eta}{r\eta\left(1 + \frac{2\sigma_\eta}{\eta} - \frac{p^2}{\eta^2}\right)} = \frac{\eta + 2\sigma_\eta}{r\left(1 + \frac{2\sigma_\eta/\eta}{1 - p^2/\eta^2}\right)^{1/2} (1 - p^2/\eta^2)^{1/2}} \approx \frac{\eta + 2\sigma_\eta}{r\left(1 + \frac{\sigma_\eta/\eta}{1 - p^2/\eta^2}\right) (1 - p^2/\eta^2)^{1/2}} \\ &\approx \frac{1}{r(1 - p^2/\eta^2)} (\eta + 2\sigma_\eta) \left(1 - \frac{\sigma_\eta/\eta}{1 - p^2/\eta^2}\right) = \frac{\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)^{3/2}} + \frac{2\sigma_\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Así pues: $f(\eta + \sigma_\eta, r) = f(\eta, r) + \frac{\sigma_\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)^{3/2}} \left(2 - \frac{1}{1 - p^2/\eta^2}\right)$

luego:

$$\sigma_f = \frac{\sigma_\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)^{3/2}} \left(2 - \frac{1}{1 - p^2/\eta^2}\right)$$

si multiplicamos ambos miembros por

$$\eta \sigma_f = \sigma_\eta \frac{\eta}{r(1 - p^2/\eta^2)} \left(2 - \frac{1}{1 - p^2/\eta^2}\right) = \sigma_\eta f \cdot \left(2 - \frac{1}{1 - p^2/\eta^2}\right)$$

llegando a

$$\frac{\sigma_f}{f} = \frac{\sigma_\eta}{\eta} \left(2 - \frac{1}{1 - p^2/\eta^2}\right) \quad (4-12)$$

Esta es pues la relación entre las desviaciones relativas de η , que pueden obtenerse de la tabla 4-2, y de la función $f(r, \eta)$ del integrando. Como era previsible, en (4-12), se ve claramente, que la indeterminación aumenta con la profundidad, teniendo de nuevo una singularidad en el punto mas profundo de cada rayo $r_m(p_1)$, en el que $\eta = p_1$.

Ya se ha indicado que el método empleado elude el cálculo de integrales en dicha región. La fórmula (4-12) se utilizó para todas las regiones excepto la última, en el cálculo de las desviaciones correspondientes a los $T_j(p_1)$, dados por (4-11). Así, para la región j, la desviación obtenida es:

$$\sigma_j^2 = (r_{j-1} - r_j)^2 \sum_{k=0}^4 w_k^2 \sigma_{f(r_j, r_j)}^2 \quad (4-13)$$

La desviación típica del tiempo de permanencia en la región mas profunda se obtiene de (4-9)

$$| \sigma_{min} | = \sqrt{\sum \sigma_j^2} \quad (4-14)$$

4.5.3.- Programa GAUSS

La realización de cálculos como los de las fórmulas (4-11) y (4-13) es laboriosa, por lo que se realizó un programa (GAUSS) que calcula los tiempos de permanencia y sus desviaciones, en cada región, teniendo en cuenta dichas fórmulas y los datos de la tabla 4-5. El cálculo de los tiempos totales por región se realizó mediante una calculadora manual programable, teniendo en cuenta, según la tabla 4-3, si una región era atravesada una o dos veces por el rayo en su recorrido (el programa GAUSS no consideraba esa posibilidad, limitándose a calcular $T_j(p_1)$ y $\sigma(T_j(p_1))$ en un recorrido simple por cada región).

Conviene señalar que dicho programa, en la versión que tenía al realizar este trabajo, no calculaba el tiempo de recorrido del rayo entre el foco y la frontera de la región siguiente ($dr < 0$ en la figura 4-3(a)). Este cálculo se efectuó también mediante integración de Gauss entre el foco y la frontera de región mas próxima a él.

Si representamos por r_F , r_{j-1} y r_j , las coordenadas radiales del foco y de la región en que se encuentra, existen dos posibilidades:

a) Si r_F está mas próximo a la frontera mas profunda r_j (ver figura 4-3(a)), para calcular el tiempo en la región del foco T_j , se suma al tiempo de recorrido entre r_F y r_j , el tiempo calculado por el programa GAUSS para el recorrido l' : $T_j = t_F + t(l')$.

b) Si r_F está más próximo a la frontera superior r_{j-1} , el tiempo total de permanencia en la región del foco es: $T = 2t(2') - t_F$ (figura 4-3(b)).

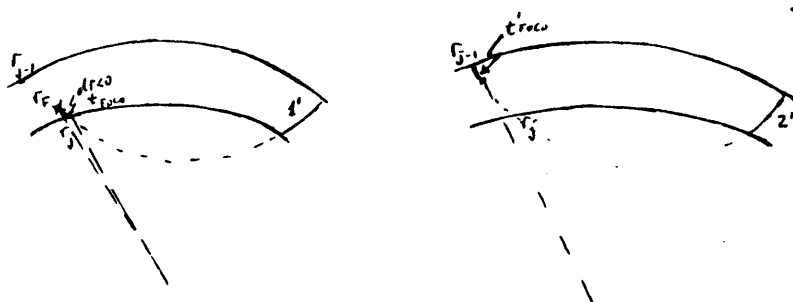


Figura 4.3 Recorrido de un rayo sísmico en la región del foco.

En la tabla 4-6, aparecen los datos necesarios para el cálculo de los tiempos de recorrido, para un rayo de parámetro p_1 , $t_p(p_1)$, entre el foco y la frontera de región mas oceana. En los tres terremotos, y debido a la proximidad del foco a fronteras de región, se realizó la integración por Gauss con sólo tres puntos. En la mencionada tabla, figuran los ceros del polinomio de Legendre de grado tres y los correspondientes valores de η , así como los valores de los límites de integración. El tiempo t_p es:

$$t_p = (b-a) \sum_{k=0}^2 w_k f(x_k) \quad (4-15)$$

TABLA 4-6. Tiempos en la región focal

Terremoto n°	Región focal	Límites (a,b) de integración (km)	x_k (km)	η_k (s)
1 (a)	4	5788 - 5771	5772,92	574,3
			5779,50	576,2
			5786,08	578,1
2 (a)	5	5771 - 5745	5747,93	567,1
			5758,0	570,0
			5768,07	572,9
3 (b)	2	6251 - 6211	6215,51	767,8
			6231,0	773,7
			6246,49	779,6

Entre paréntesis figura el método empleado para el cálculo de t_p

TABLA 4-7 Tiempos de permanencia por región para las ondas P.

- 68 -

Debajo de cada T_j , entre paréntesis, figuran las desviaciones correspondientes.

(a) TERREMOTO N° 1

REGION	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ESTACION	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BHP	7,974 (0,005)	19,01 (0,002)	45,21 (0,07)	52,9 (1,6)	107,9 (1,7)				
CAR	7,95	18,90 (0,003)	44,8 (0,07)	51,2 (1,4)	113,1 (1,4)				
PEL	7,82	18,42 (0,005)	43,13 (0,036)	45,5 (0,80)	156,1 (0,8)				
SJC	7,73	18,05 (0,007)	41,88 (0,02)	42,1 (0,5)	192,2 (0,5)				
LPA	7,72	17,98	41,67	41,6	203,0				
CHC	7,54	17,30 (0,01)	39,48 (0,03)	36,5 (0,2)	90,2 (2,6)	206,0 (2,7)			
SHA	7,46	17,0	38,55 (0,04)	34,9 (0,1)	78,5 (1,4)	123,7 (5,7)	127,9 (5,9)		
SOM	7,45	16,94	38,37	34,5	78,8 (1,2)	114,4 (4,0)	143,6 (4,1)		
ATL	7,43 (0,005)	16,88	38,19	34,21	75,0 (1,1)	107,1 (3,0)	161,2 (3,2)		
OXF	7,38	16,70	37,66 (0,05)	33,37 (0,07)	70,6 (0,8)	91,92 (1,6)	200,4 (1,7)		
GEO	7,35	16,60	37,31	32,69 (0,05)	67,98 (0,6)	84,92 (1,1)	221,1 (1,3)		
OGD SCP	7,31	16,42	36,81	31,86 (0,03)	64,6 (0,4)	76,9 (0,7)	249,1 (0,9)		
FLO	7,29 (0,006)	16,36	36,65 (0,06)	31,61 (0,02)	63,6	74,8 (0,6)	258,8 (0,8)		
WES	7,29	16,36	36,64	31,59	63,6	74,7	261,9		
AAM	7,26	16,26	36,33	31,1	61,7 (0,3)	70,9 (0,5)	276,4 (0,6)		
*ALQ	7,22	16,09	36,16	30,37 (0,03)	59,2 (0,2)	66,1 (0,3)	212,6 (5,8)	87,6 (5,8)	
TUC	7,21	16,04	35,70	30,14 (0,04)	58,4	64,7	191,2 (3,2)	120,6 (3,2)	

TABLA 4-7 (Continuación)

- 69 -

(a) TERREMOTO N° 1

REGION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ESTACION										
COL	7,18	15,94	35,41 (0,07)	29,79 (0,05)	56,9 (0,1)	62,14 (0,2)	169,2 (1,6)	161,4 (1,7)		
RCD	7,14	15,79	34,98	29,09 (0,06)	51,0 (0,05)	58,9	147,7 (0,8)	206,4 (0,8)		
*COR	7,00	15,28 (0,02)	33,55 (0,08)	27,12 (0,10)	49,2 (0,08)	50,3 (0,1)	109,9 (0,1)	354,6 (33)	< 0,0 (35)	
LON	6,99	15,23	33,43	25,35	48,8 (0,09)	49,7	107,8	268,6 (3,6)	68,1 (3,7)	
PTO	6,93	15,03	32,87	26,24	46,9 (0,1)	47,12 (0,04)	99,24 (0,03)	190,3 (0,4)	181,4 (0,4)	
TOL	6,91	14,95	32,66	25,98	46,16	46,20 (0,05)	96,42 (0,02)	176,5 (0,2)	218,2 (0,3)	
BAL	6,90	14,90	32,53	25,83	45,76	45,66	94,8	169,5	235,1 (0,2)	
SPA	6,89	14,88	32,46	25,73	45,52	45,34 (0,06)	93,84 (0,02)	165,6	244,7 (0,2)	
CMC	6,89	14,80	32,26 (0,09)	25,50	44,9	44,56	91,54 (0,03)	156,9 (0,1)	162,7 (0,9)	102,9 (0,9)
WIN	6,85	14,73	32,07	25,25	44,3 (0,2)	43,82 (0,07)	89,4 (0,07)	149,6 (0,07)	137,9 (0,4)	151,9 (0,4)
NOR	6,81	14,60	31,71	24,81	44,3	42,9 (0,08)	42,9 (0,08)	138,2 (0,02)	112,4 (0,1)	237,6 245,6(0
PRE	6,81									246,6
BUL	6,81									
IST	6,80	14,57	31,63	14,71	43,0	42,18	42,18	135,8	108,1	288,3

TABLA 4-7 (Continuación)

(b) TERREMOTO N° 2

REGION

ESTACION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
INR	7,766 (0,005)	18,183 (0,006)	42,34 (0,03)	39,59 (0,5)	153,12 (0,5)					
CTA	7,577	17,44 (0,01)	39,93	34,47 (0,2)	93,34 (3,7)	148,2 (3,7)				
RAB	7,574	17,43	39,89	34,4	92,68	151,0				
PMC	7,500	17,34	39,60	33,9	87,8 (2,9)	171,8 (2,9)				
CUA	7,291	17,35	36,61 (0,06)	29,03 (0,02)	59,81 (0,4)	74,31 (0,6)	251,6 (0,7)			
*BAG	6,988 (0,006)	15,24 (0,02)	34,44 (0,08)	24,88 (0,09)	45,86 (0,09)	49,76 (0,01)	108,0 (0,1)	271,46 (4,0)	54,3 (4,1)	
LEM	6,965	15,16	32,22	24,61 (0,1)	45,11 (0,1)	48,7 (0,02)	104,4 (0,07)	225,0 (1,1)	120,9 (1,2)	
HKC	6,902	14,93	32,61	23,9	43,2	46,0 (0,05)	95,74 (0,02)	173,5 (0,2)	220,3 (0,3)	
GSC	6,866	14,80	32,26 (0,09)	23,51	42,1 (0,2)	44,56 (0,06)	91,54 (0,03)	156,9 (0,1)	162,7 (0,9)	99,6 (1,0)
SNC	6,849	14,74	32,02	23,32	41,6	43,90 (0,07)	89,66 (0,04)	150,48 (0,07)	140,36 (0,4)	140,97 (0,5)
TUC	6,841	14,71	32,02	23,24	41,4	43,64	88,88	147,92 (0,06)	133,4	155,9
LON	6,835	14,69	31,97	23,18	41,3	43,44	88,32 (0,05)	146,08 (0,06)	128,9 (0,3)	167,3 (0,4)
ALQ	6,813	14,62	31,76	22,95	40,7	42,66 (0,08)	86,16	139,5 (0,03)	114,9 (0,2)	208,9 (0,3)
COL CHG	6,810	14,60	31,72	22,92	40,6	42,54	85,84 (0,06)	139,6 (0,02)	113,1 (0,1)	214,3 (216,3)
SHL	6,792	14,54	31,56	22,74	40,2	41,96 (0,09)	84,24	133,98	105,1 (0,09)	269,9 (0,2)
CMC LPA OXF	6,788	14,58	31,53	22,70	40,1	41,84	83,94 (0,07)	131,16	103,8 (0,08)	285,7 (289,7) 291,7

TABLA 4-7 (Continuación)

(c) TERREMOTO N° 3

REGION										
ESTACION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QUE	7,567 (0,005)	23,74 (0,01)	79,6 (0,04)	68,47 (0,3)	95,5 (3,4)	139,2 (3,5)				
WES	7,028 (0,006)	29,95 (0,02)	67,69 (0,1)	50,73 (0,1)	50,28 (0,06)	51,8 (0,03)	115,5 (0,2)	281,98 (0,2)		
BEC	7,013	20,89	67,38	50,36	49,72 (0,07)	51,04 (0,02)	112,5 (0,1)	293,1		
GEO	6,963	20,65	64,40	49,18	47,96 (0,1)	48,60	104,06 (0,07)	222,4 (1,0)	115,1 (1,1)	
TRN	6,904	20,35	65,24	47,84 (0,2)	46,04	46,04 (0,05)	95,92 (0,02)	174,3 (0,2)	206,38 (0,4)	
MNN	6,901	20,34	65,18	47,78	45,96	45,92	95,56	162,7	219,7	
FLO	6,874	20,19	64,66	47,18	45,12 (0,2)	44,82 (0,06)	92,34 (0,03)	159,9 (0,1)	176,6 (1,4)	66,3 (1,6)
CAR	6,86	20,15	64,44	46,92	44,76	44,38	91,04	155,17 (0,7)	155,7 (0,8)	101,6 (0,8)
RCD	6,847	20,08	64,16	46,62	44,36	43,86 (0,07)	89,52 (0,04)	150,0 (0,07)	139,0 (0,4)	134,5 (0,6)
BAG	6,842	20,05	64,05	46,50	44,20	43,64	89,93 (0,04)	148,08	133,8	144,9 (0,4)
DAL	6,817	19,93	63,58	45,98	43,50	42,80 (0,08)	86,52 (0,06)	140,58 (0,03)	116,9 (0,2)	195,3 (0,3)
COR	6,804	19,87	63,58	45,70	43,14	42,34	85,28 (0,02)	136,94 (0,1)	111,1	219,4
BOG	6,801	19,86	63,28	45,66	43,06	42,26	85,06	136,30	109,1	224,6
ALQ	6,799	19,85	63,24	45,60	43,0	42,16	84,82	135,64	107,8	230,0

Los resultados finales obtenidos están reflejados en la tabla 4-7 (a), (b) y (c). En ellas se indica, no sólo el tiempo de permanencia para cada rayo, en cada región, sino también las desviaciones típicas asociadas a dichos valores - entendiendo que aquellos para los que falta la desviación, es igual a la del rayo anterior en la misma región -. Puede comprobarse que las mayores desviaciones se obtienen para rayos tales que su trayectoria apenas penetra en la región mas profunda. Aquellos rayos con error relativo en el tiempo de permanencia en alguna región mayor del 5%, se han señalado con un asterisco.

4.6.- CALCULO DE LA DISTRIBUCION DE Q_p EN EL MANTO

4.6.1.- Procedimiento empleado

A partir de los datos hallados en el capítulo precedente para $T \cdot Q_n^{-1}(\Delta)$ y en la sección 4.5 para los tiempos $T_j(p_1)$, se está en condiciones de resolver el sistema (4-3), para aquellas ondas P que no figuran con asterisco (es decir, que no tienen gran desviación en esos valores).

La resolución de dicho sistema superdeterminado : $\sum_j T_j(p_1) \cdot Q_j^{-1} = (T \cdot Q_n^{-1})(p_1)$; se realizó mediante dos programas diferentes, creados especialmente para éste fin y que se han señalado en la figura 4-1.

1. El programa SYSTEQIN resuelve el sistema por el método de mínimos cuadrados. Se tiene pues, un problema totalmente análogo al resuelto por SYSTEQ2Q en el capítulo anterior. Se utiliza el método de eliminación de Gauss para la resolución del sistema normal equivalente al superdeterminado, así como para el sistema que resulta para los errores.

Si consideramos el sistema superdeterminado (4-3) y lo escribimos:

$$\sum_j T_j^i \cdot X_j = t^{*i} \quad (4-16)$$

donde $t^{*i} = T \cdot Q_n^{-1}(p_1)$ y $X_j = Q_j^{-1}$

o, más brevemente:

$$\bar{T} \cdot \bar{X} = \bar{t} \quad (4-17)$$

el sistema normal a resolver es:

$$(\bar{T}^t \cdot \bar{T}) \bar{X} = \bar{T}^t \cdot \bar{t} \quad (4-18)$$

Si se tiene en cuenta que los T_j^1 , son valores con unas desviaciones asociadas: $\delta T_j^1 (= \sigma(T_j^1))$, y del mismo modo, los t_i tienen una $\delta t_i = \sigma(t_i)$, el sistema que resulta al considerar estas desviaciones o errores es:

$$(\bar{T} + \delta \bar{T})^t (\bar{T} + \delta \bar{T}) (\bar{X} + \delta \bar{X}) = (\bar{T} + \delta \bar{T})^t (\bar{t} + \delta \bar{t})$$

que simplificado conduce a:

$$(\bar{T}^t \cdot \bar{T}) \cdot \delta \bar{X} = \bar{T}^t \cdot \delta \bar{t} - (\bar{T}^t \cdot \delta \bar{T} + \delta \bar{T}^t \cdot \bar{T}) \bar{X} + \delta \bar{T}^t \cdot \bar{t} \quad (4-19)$$

siendo \bar{X} , la solución aproximada hallada al resolver (4-18).

Una primera aproximación al sistema (4-19) y razonable en este caso, sería considerar únicamente los errores en los términos independientes, $\delta \bar{t}$. No obstante, el programa SYSTEQIN resuelve (4-18) y (4-19) en el caso más general.

Este programa consideraba, asimismo, un número variable de regiones que vamos a llamar zonas para evitar equivocaciones, cada una de las cuales podía comprender una ó más de las regiones, 1 a la 10, en que se dividió el Manto. La condensación o suma de los tiempos en las regiones que integran cada zona, para calcular los tiempos de permanencia de cada rayo en cada zona, lo efectuaba una subrutina (CONDENSA). El objeto de la variabilidad del número de zonas era la conveniencia del cálculo de la distribución de Q_u con la profundidad, para un número creciente de zonas (de 1 a 10), o para distintos conjuntos de zonas.

2. Para contrastar los resultados anteriores y obtener unas soluciones alternativas, se efectuó la resolución del sistema superdeterminado por el método MINI-MAX o de Tohebisheff. Este es, claramente, un problema de programación lineal y puede resolverse en forma de algoritmo por el

método Simplex, si se impone a las soluciones la condiciones de no negatividad (el fundamento del método puede verse en los libros de Scheid, 1972 y de Wilde y Beightler, 1967). Este algoritmo se implementó en el programa SIMPQIN (Apéndice A), para nuestro problema particular.

El método hace que la máxima de todas las desviaciones, sea mínima ; es decir, en nuestro caso:

$$\max (t_i^* - \sum_j T_j^i d_j^-) \leq |r|$$

Ambos programas se ejecutaban, para un número de zonas dado, de modo encadenado, ya que SYSTEQIN efectuaba la suma de los T_j^i y éstos datos, grabados en disco, servían de entrada a SIMPQIN.

De los resultados obtenidos, consistentes entre si en general, se prefirieron los de SYSTEQIN, porque dan un índice de la desviación típica de las soluciones, debida a las de los coeficientes.

Realmente, el objeto de SIMPQIN era servir como código que pudiese dar soluciones positivas cuando SYSTEQIN, por mal condicionamiento del sistema, diese soluciones negativas. No obstante, los resultados mostraron que, en aquellos casos en que éste último programa daba valores negativos para algunas incógnitas, el primero daba un valor nulo para las mismas. Esto demuestra que difícilmente se pueda superar el pobre condicionamiento del sistema, debido a los datos t_1^* , mediante ningún artificio matemático. Además, SIMPQIN no tiene perfectamente resueltos los problemas de elección de puntos factibles de partida, aunque no parece que en el problema estudiado esto pueda tener una gran trascendencia, si se compara con los problemas de mal condicionamiento.

4.6.2.- Resultados

Los resultados obtenidos por SYSTEQIN y SIMPQIN, para dos y tres zonas, figuran en la tabla 4-8, como modelos de disipación de energía sísmica en el Manto MPD2 y MPD3 respectivamente. A partir de un número

de zonas mayor que cuatro, los datos obtenidos en el capítulo 3 para $t^*(\Delta) (= T \cdot Q_k^{-1}(\Delta))$, no permiten ya la obtención de soluciones con significado físico, porque en SYSTEQIN comienzan a aparecer regiones con factores de calidad menores que 0 y en SIMPQIN, la incógnita correspondiente a esa zona, no entra en la base, por lo que se supone igual a 0.

Para llegar a un modelo aproximado mas detallado que el MPD3, se emplearon resultados de los programas mencionados, para distintos conjuntos de dos y tres zonas (Con ésto se quiere indicar, que se resolvía el problema para tres zonas que comprenderían, porejemplo, las regiones: 1-5; 6-9; 10 y a continuación 1-5; 6-8; 9-10 etc.). El conjunto de éstos resultados se comparaba, a fin de considerar la variación del factor Q de una zona, obtenido como solución de sistemas distintos (en el ejemplo anterior se podrían comparar los valores de Q_{1-5}). Este proceso es bastante tedioso, pues para llegar a resultados de fiabilidad comprobada, se debieron resolver un gran número de sistemas superdeterminados para dos y tres zonas (~30 SYSTEQIN y SIMPQIN de tres zonas y 9 de dos).

El procedimiento empleado para calcular valores de Q en las regiones 1 y m; a partir de los valores de Q en zonas que comprendan estas regiones; está basado en que se conoce, por los resultados del capítulo 3, la suma de los productos de los tiempos de permanencia de cada rayo en cada región por las funciones de disipación específicas medias de dichas regiones: Q_j^{-1} , y que es igual a $\sum_i t_i^*$ siendo i la zona considerada.

Así pues, es evidente la igualdad (en la que se han suprimido términos comunes):

$$\begin{aligned} \left(\sum_j T_{(l,m)}^j \right) Q_{(l,m)}^{-1} &= \left(\sum_j T_{(l+1,m)}^j \right) Q_{(l+1,m)}^{-1} + \sum_j T_{(l)}^j Q_{(l)}^{-1} ; l < m \quad (4-20) \\ \left(\sum_j T_{(l+m)}^j \right) Q_{(l+m)}^{-1} &= \left(\sum_j T_{(l+m-1)}^j \right) Q_{(l+m-1)}^{-1} + \left(\sum_j T_m^j \right) Q_m^{-1} \end{aligned}$$

donde el índice entre paréntesis ($\ell+m$) indica que la zona a que nos referimos abarca las regiones ℓ hasta la m . Por ello $Q_{\alpha}(\ell+m)$ será el factor de calidad medio para dicha zona. Para obtener, por ejemplo, el valor de $Q_{\alpha}^{-1}_6$; aplicando (4-20b) con $\ell=1$ y $m=6$, bastará conocer $Q_{\alpha}^{-1}_{(1+6)}$ y $Q_{\alpha}^{-1}_{(1+5)}$; o aplicando (4-20a) con $\ell=6$ y $m=10$, será suficiente el conocimiento de $Q_{\alpha}^{-1}_{(6+10)}$ y $Q_{\alpha}^{-1}_{(7+10)}$.

Con las fórmulas (4-20) y los resultados para dos y tres zonas, se llegó, finalmente, a los modelos mas detallados MPD5 y MPD8 que figuran junto con los anteriores en la tabla 4-8. En éstos últimos no aparece la región 1, ya que el método empleado daba resultados con gran dispersión. Para ésta región, puede tomarse el valor de Press (1964).

Los distintos modelos de distribución de Q ; MPD2, MPD3, MPD5 y MPD8, se han representado en las figuras 4-4 a la 4-9. Los valores medios aparecen en trazo continuo y las desviaciones, que durante todo el proceso se supusieron de tipo estadístico ya que los errores de modelo y errores matemáticos se consideraban aparte, están señaladas en trazo discontinuo y crecen al aumentar en detalle el modelo.

De los modelos MPD2 y MPD3 se deduce que los valores de Q_{α}^{-1} en el Manto Superior son un orden de magnitud mayores que los del Manto Inferior, si excluimos la región mas profunda de éste (2400-2885 km.). Las desviaciones típicas relativas son mayores en el Manto Inferior que en el Superior; siendo ya $\sigma(Q)$ importante entre los 800 y 2400 km (35%).

El modelo MPD5 presenta una estructura que confirma el salto de un orden de magnitud en el valor de Q , alrededor de los 800km. Muestra el mínimo de la atenuación existente entre los 800 y 2000 km de profundidad; parece indicar, que a partir de ésta profundidad, se inicia un nuevo aumento en el valor de la disipación específica Q_{α}^{-1} . Las desviaciones en éste modelo son: 10% para las zonas del Manto Superior; 40% para la zona de baja atenuación; 70% en la región 9 y 15% en la 10.

TABLA 4-8 Modelos de Q_a^{-1} y Q_a con la profundidad en el Manto.

(a) Dos zonas: Modelo MPD2					
REGIONES	Prof. (Km)	Q^{-1}	$\sigma(Q^{-1})$	Q	$\sigma(Q)$
1-5	(0-800)	$0,732 \cdot 10^{-2}$	$0,77 \cdot 10^{-3}$	137	14
6-10	(800-2885)	$0,171 \cdot 10^{-2}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$	585	123
(b) Tres zonas: MPD3					
1-5	(0-800)	$0,733 \cdot 10^{-2}$	$0,77 \cdot 10^{-3}$	137	14
6-9	(800-2400)	$0,628 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-3}$	1592	456
10	(2400-2885)	$0,534 \cdot 10^{-2}$	$0,71 \cdot 10^{-3}$	187	25
(c) Cinco zonas: MPD5					
2-3	(40-400)	$0,810 \cdot 10^{-2}$	$0,74 \cdot 10^{-3}$	123	11
4-5	(400-800)	$0,909 \cdot 10^{-2}$	$0,81 \cdot 10^{-3}$	110	10
6-8	(800-2000)	$0,375 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-3}$	2667	1280
9	(2000-2400)	$0,182 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	549	377
10	(2400-2885)	$0,534 \cdot 10^{-2}$	$0,71 \cdot 10^{-3}$	187	25
(d) Ocho zonas: MPD8					
2	(40-160)	$0,446 \cdot 10^{-2}$	$0,30 \cdot 10^{-2}$	224	150
3	(160-400)	$0,958 \cdot 10^{-2}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	104	18
4	(400-600)	$0,149 \cdot 10^{-1}$	$0,29 \cdot 10^{-2}$	87	17
5	(600-800)	$0,654 \cdot 10^{-2}$	$0,23 \cdot 10^{-2}$	153	53
6	(800-1000)	$0,798 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-3}$	1253	283
7-8	(1000-2000)	$0,249 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-3}$	4022	2910
9	(2000-2400)	$0,182 \cdot 10^{-2}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	549	362
10	(2400-2885)	$0,534 \cdot 10^{-2}$	$0,71 \cdot 10^{-3}$	187	25

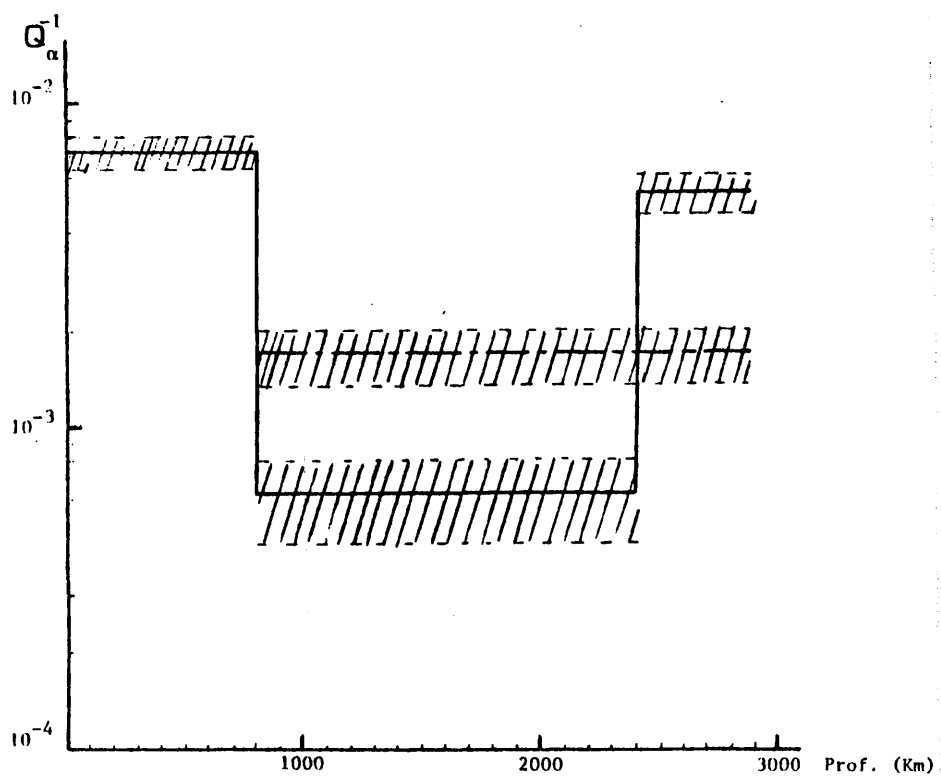


Figura 4-4. Distribución de Q_{α}^{-1} en el Manto: Modelos MPD2 y MPD3 (las zonas rayadas representan desviaciones típicas de los valores medios, como en las restantes figuras que se refieran a los modelos MPD's calculados en esta memoria).

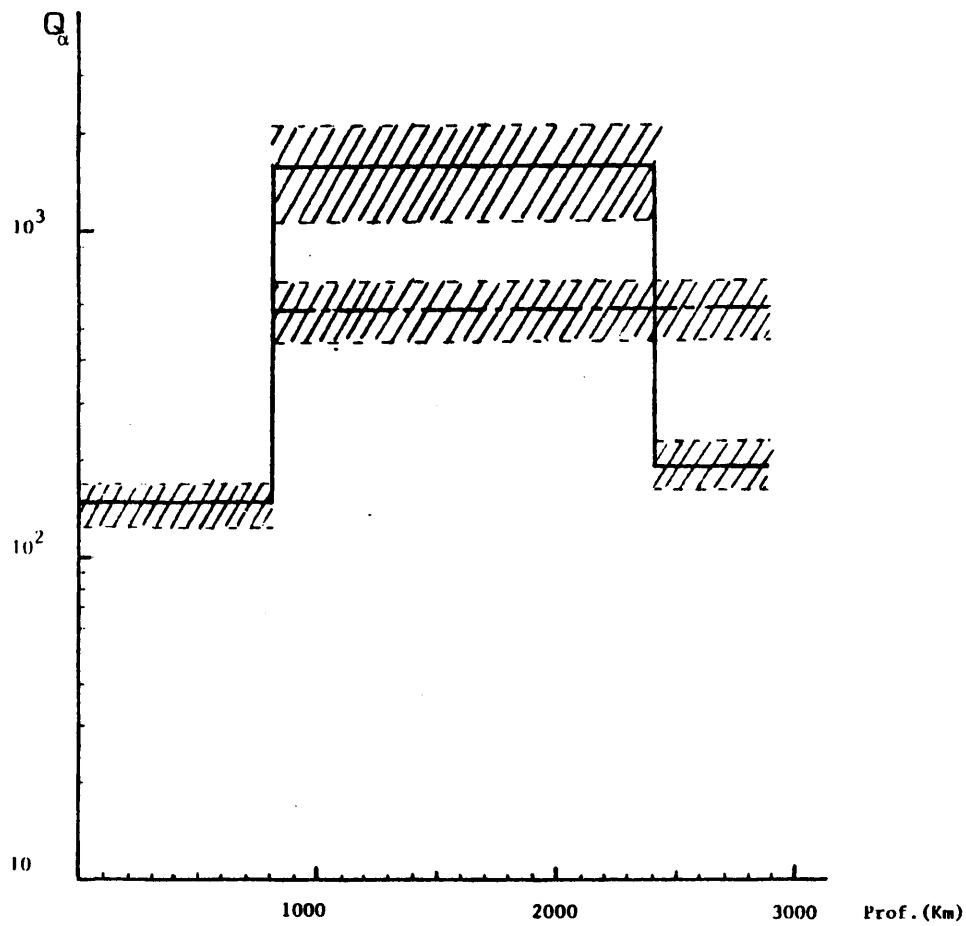


Figura 4-5. Distribución de Q_α en el Manto. Modelos MPD2 y MPD3.

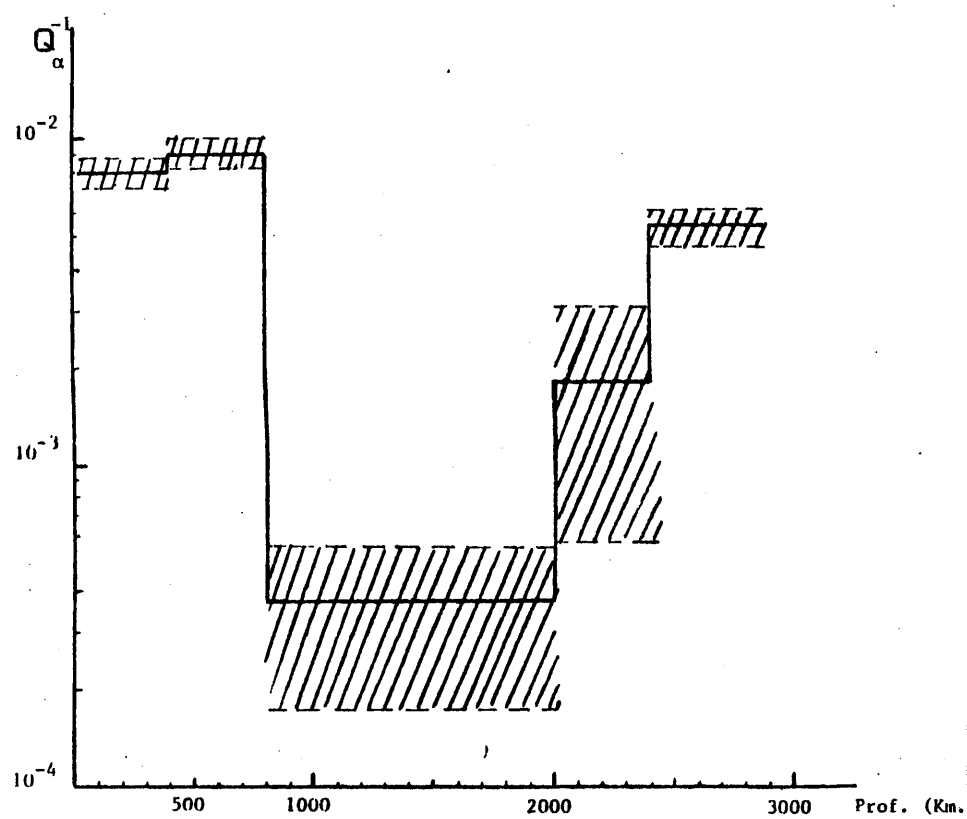


Figura 4-6. Modelo MPD5 de distribución de Q_{α}^{-1} en el Manto.

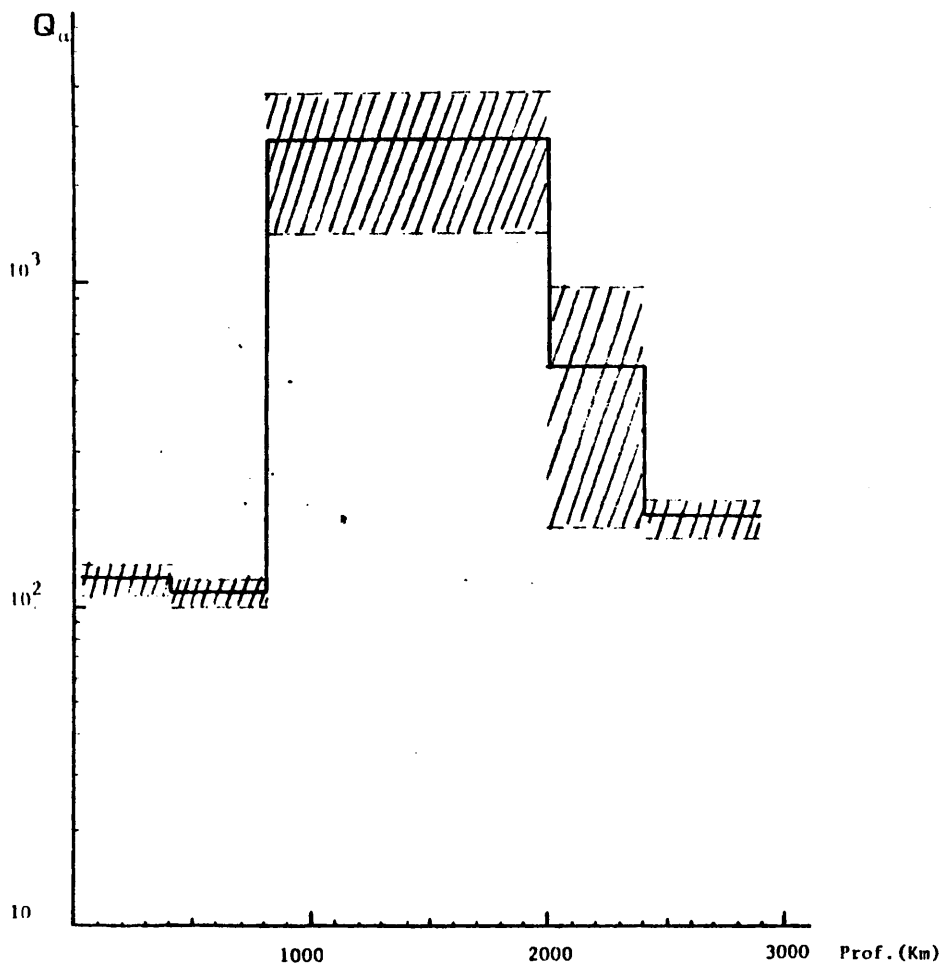


Figura 4-7. Modelo MPD5 de distribución de Q_α en el Manto.

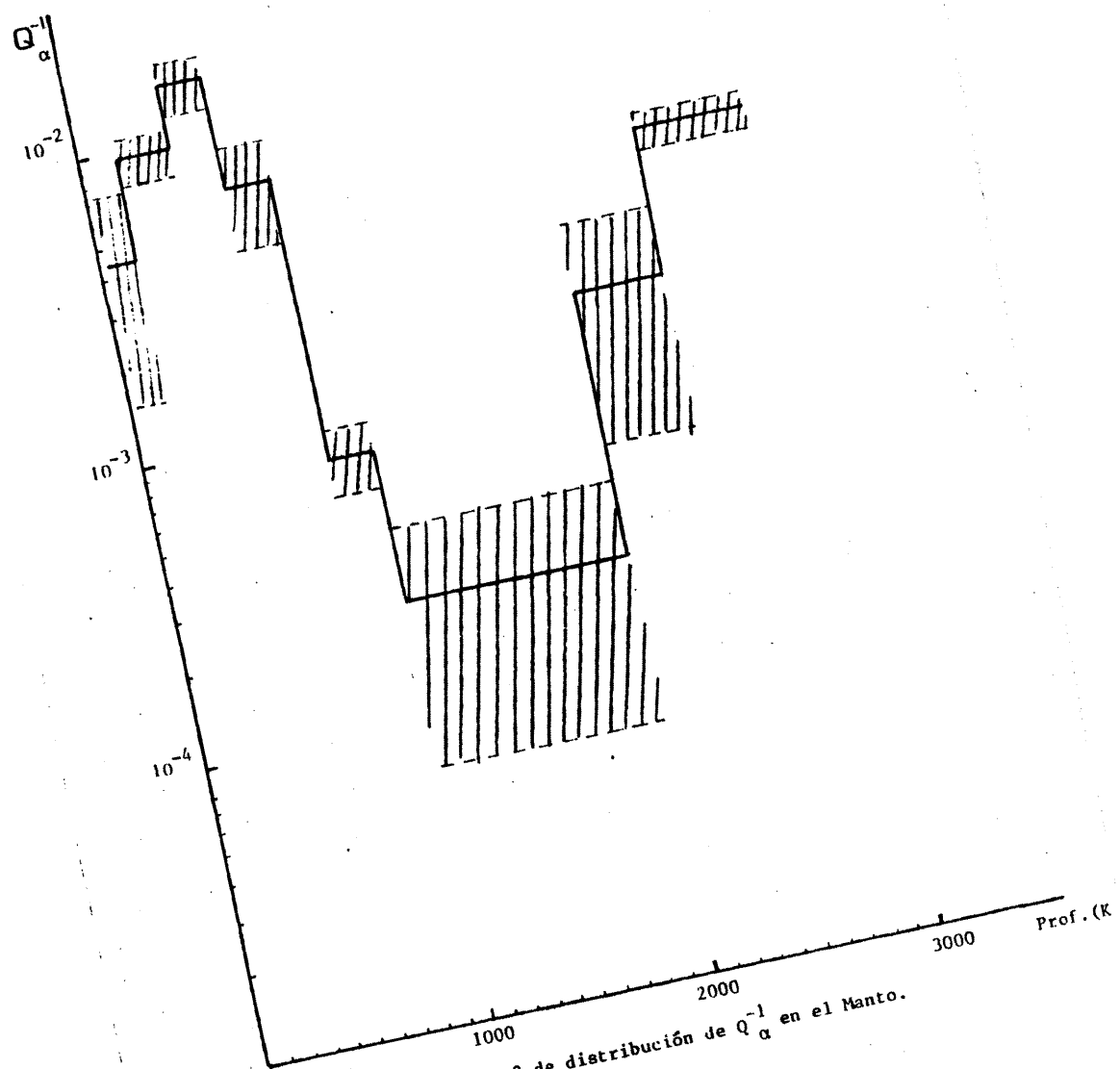


Figura 4-8. Modelo MPD8 de distribución de Q_{α}^{-1} en el Manto.

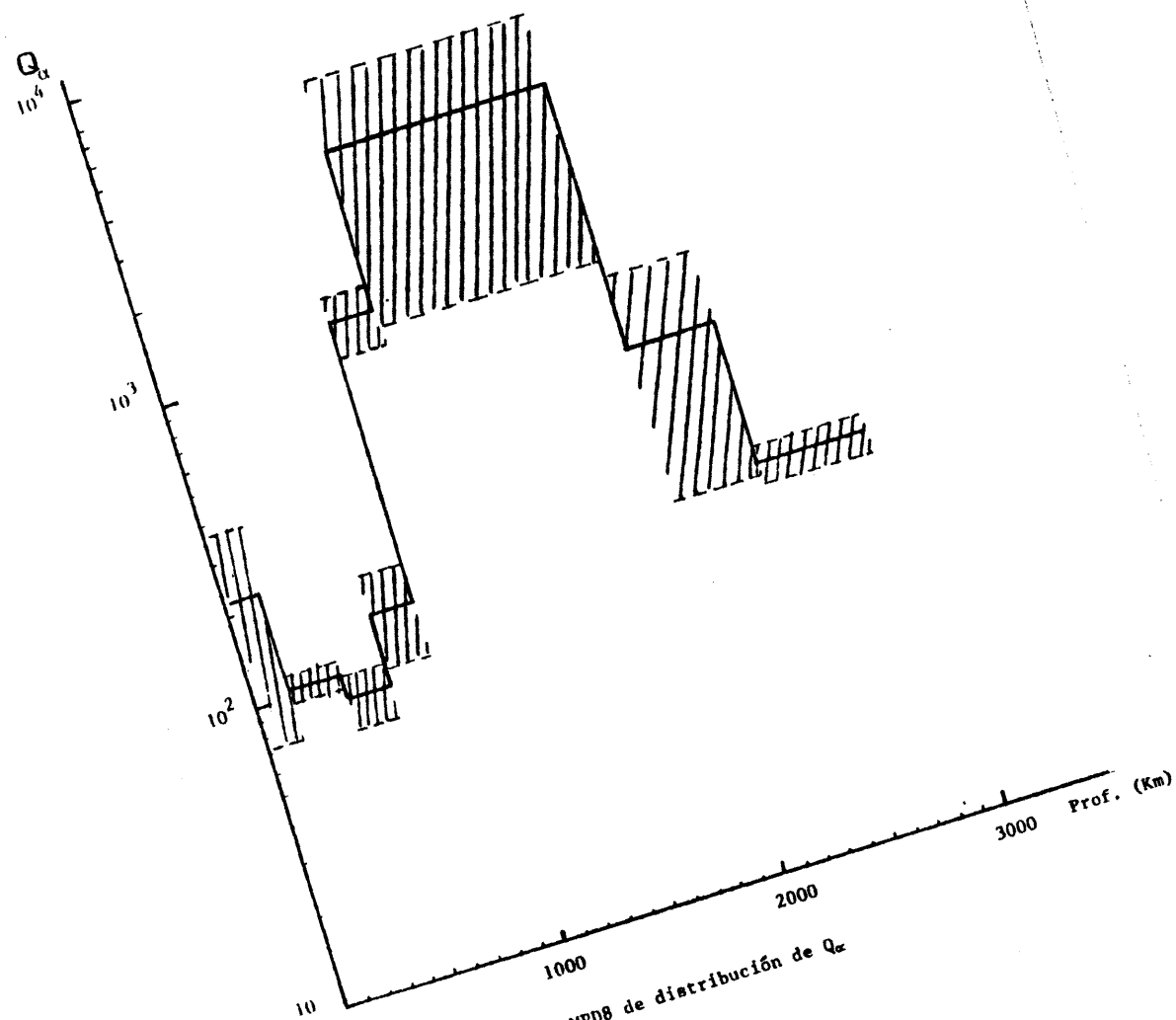


Figura 4-9. Modelo MPD8 de distribución de Q_α

El modelo mas detallado de todos los obtenidos MPD8, muestra de un modo mas completo la estructura disipativa de energía sísmica del Manto (figura 4-8). Según éste modelo, el máximo de disipación se produciría en la región de transición, entre los 400 y 600 km de profundidad. El salto brusco en el valor de Q_a^{-1} tendría lugar alrededor de los 800 km ; el mínimo de atenuación, entre los 1000 y 2000 km ; para a partir de aquí, comenzar un aumento gradual en el valor de Q_a^{-1} que alcanzaría su valor mas alto en la frontera con el Núcleo. Por lo que se refiere a las desviaciones típicas obtenidas, hay que indicar que en la región 2 es muy grande ($\sim 70\%$); menor del 20% en las regiones 3 y 4; $\sim 35\%$ en la región 5; $\sim 70\%$ en la zona que incluye las regiones 7 y 8 y en la región 9; y $\sim 15\%$ en la última región.

Estos modelos establecen unos límites de fiabilidad para los valores de Q_a o Q_a^{-1} , en las distintas zonas y regiones (Si los resultados obtenidos de este modo, se supone que dan lugar a una distribución normal o de Gauss, podríamos decir que la probabilidad de que un nuevo valor, obtenido mediante el estudio de otros terremotos, diste menos de una desviación típica, σ_d , de los valores medios de la tabla 4-8, es del 68,3%) .

Si miramos el modelo MPD8, que es el de mayores desviaciones, desde un punto de vista semicuantitativo; podemos concluir que, cuando menos, parece plausible, ya que en él las transiciones de región a región pueden producirse de un modo casi continuo; o lo que es igual, los resultados de éste modelo son compatibles con una distribución intrínseca de Q continua.

4.7.- COMPARACION CON OTROS MODELOS

4.7.1.- Modelos basados en ondas internas

El número de modelos de distribución del factor de calidad para ondas internas P , con la profundidad en el Manto, obtenidos del análisis

sis de dichas ondas, es muy pequeño: Kanamori (1967), Mikumo y Kurita (1968), Teng (1968) y Berzon et al. (1974). Los resultados de éstos autores, para valores medios de Q_e en el Manto Superior, Manto Inferior y Manto Completo, figuran junto con el de ésta memoria, en la tabla 4-9.

TABLA 4-9. Comparación de distintos modelos de Q_e . (1)

	Teng	Kanamori	Mikumo y M5	Kurita M14	Berzon et al.	MPD's
Periodos estudia dos (s)	5-100	0,5-2	8-42		0,6-5	7-36
Manto Superior	93	180-240	120	294	530±150	137(14)
800-2500 km	700					1592(456)
Manto Inferior		1600-6000	1690	4900	1330 ⁺⁷³⁰ -360	585(123)
2500-2885	650-100		106	122		187(25)
Manto Completo	300	435	292	702	845 ⁺⁴²⁰ -260	337(50)

(1) Todos los valores que aparecen en esta tabla, exceptuados los periodos, se refieren al factor Q_e .

Estos modelos no son muy consistentes entre si, aunque los de Teng, M5 de Mikumo, Kanamori y MPD's resultan comparables; el modelo de Berzon et al., se distingue claramente de los anteriores por proponer un valor de Q_e bastante superior en la parte más extensa del Manto y consiguientemente, un valor mayor de Q_e en el Manto completo. No obstante a las diferencias que presentan estos modelos, se puede decir que poseen dos, o quizás tres, rasgos fundamentales comunes.

1. Existencia de una zona de baja Q_e en el Manto Superior. Algunos autores, basados en el modelo MMB de Anderson et al. (1965), establecen las fronteras del mínimo de Q_e alrededor de los 150 km.; otros, como Orowan (1967), por consideraciones basadas en la estructura del Manto,

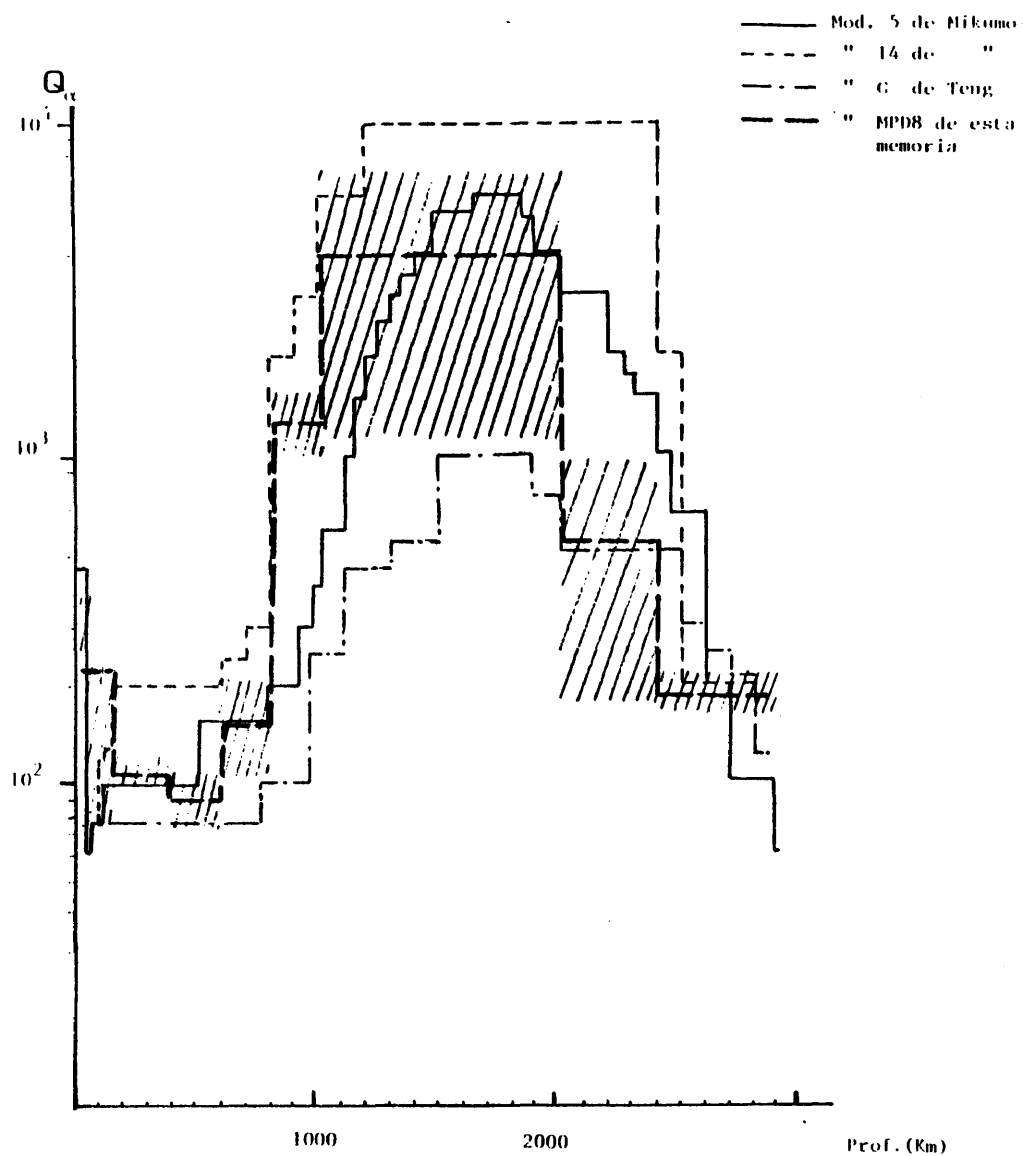


Figura 4-10. Comparación de los modelos de Q_α obtenidos por diversos autores mediante ondas P y el MPD8 de esta memoria.

localizan el mínimo en la zona de transición 400 km. El modelo MPD8 indica, aún cuando la desviación típica de Q_e en la región 2 es grande, que dicho mínimo de Q está con mayor probabilidad en la zona de transición, entre los 400 - 600 km., que en la región 2, más superficial.

2. Manto inferior con un factor Q_e alrededor de un orden de magnitud mayor que el promedio del Manto Superior. Esta condición se cumple de modo claro en todos los modelos. El modelo propuesto en esta memoria da unos factores medios, $Q_{M.I}$, en el Manto Inferior sensiblemente menores que los de Kanamori, Mikumo - Kurita y Berzon; concordando bien con el de Teng.

3. Existe un tercer rasgo, que si no es común a todos los modelos mencionados, si lo es a los que gozan de mayor aceptación (Teng, Mikumo). En estos se apunta la existencia, en la región más interna del Manto Inferior, entre 2500-2900 km., de una región de transición de Q_e baja o Q_e^{-1} , es decir disipación de energía, alta. El modelo MPD8 coincide con éstas apreciaciones, aunque parece indicar (la duda se debe a la gran desviación obtenida en el valor de Q_e en la región 9), que dicho aumento de Q_e se produce de un modo gradual a partir de los 2000 km. de profundidad; más que de la manera brusca de los modelos de Mikumo y Kurita.

En la figura 4-10 se han representado los modelos más detallados: El G de Teng, los M-5 y M-14 de Mikumo y Kurita y el MPD8 de este trabajo. De su comparación, se deduce que el MPD8 es consistente con los anteriores. En el Manto Superior la diferencia más acusada, es la situación del máximo de atenuación, que los modelos de Teng y Mikumo - basados parcialmente en el MM8 de Anderson - sitúan más superficial que nuestro modelo. La atenuación en la parte superior del Manto Inferior, es mayor que la indicada por Teng y está más de acuerdo con el modelo M5 de Mikumo, aunque dada la desviación de los valores de MPD8, también es consistente en dicha zona con M15. En los últimos 800 km. del

Manto Inferior, nuestro modelo se asemeja mas al de Teng que al de Mikumo y Kurita.

Todo lo anterior, se refiere exclusivamente a resultados numéricos; pero donde las diferencias son radicales, es en el método de cálculo utilizado. Frente al procedimiento directo empleado en el cálculo de los MPD's, a partir de $Q(\Delta)$, los otros modelos de la figura 4-10, se obtenían con métodos de prueba y error para un gran número de distribuciones de Q con la profundidad, tales que diesen una $Q(\Delta)$ lo mas parecida posible a la observada. Estos métodos resultan insuficientes a la hora de establecer una distribución por sí mismos y deben partir de ligaduras y condiciones impuestas por otros modelos basados, en general, en experiencias con ondas superficiales y modos normales de oscilaciones libres. Si tenemos en cuenta que en el conjunto de los métodos de determinación de una $Q(r)$, los basados en las ondas internas deben servir para imponer valores límites a los promedios de Q , en distintas zonas de la Tierra (Anderson y Hart, 1978), resulta una inconsistencia que dichos modelos se apoyen en distribuciones halladas mediante ondas superficiales.

Estos métodos tienen también el inconveniente de que, aun grandes variaciones en los valores altos de Q , producen sólo un ligero efecto en la distribución de $t_a^*(\Delta)$, por la gran influencia que tienen en esa las zonas de baja Q . Para hacerse una idea de esto, se han representado, en la figura 4-11, las curvas $t_a^*(\Delta)$ ($t_a^* = T \cdot Q_a^{-1}$) que se obtienen al introducir en (4-3) los modelos 5 y 14 de Mikumo y Kurita, para las ondas estudiadas en esta memoria. Se aprecia que la mayor parte de los resultados del capítulo 3 para $t_a^*(\Delta)$, se encuentran comprendidos entre ambas curvas, pese a las diferencias apreciables de ambos modelos. En la misma figura están las curvas que resultan de los modelos MPD3 y MPD8. Puede verse que ambas curvas están comprendidas, casi en su totalidad entre las de Mikumo, siendo mejor el ajuste a los puntos del modelo MPD8, que el de los restantes.

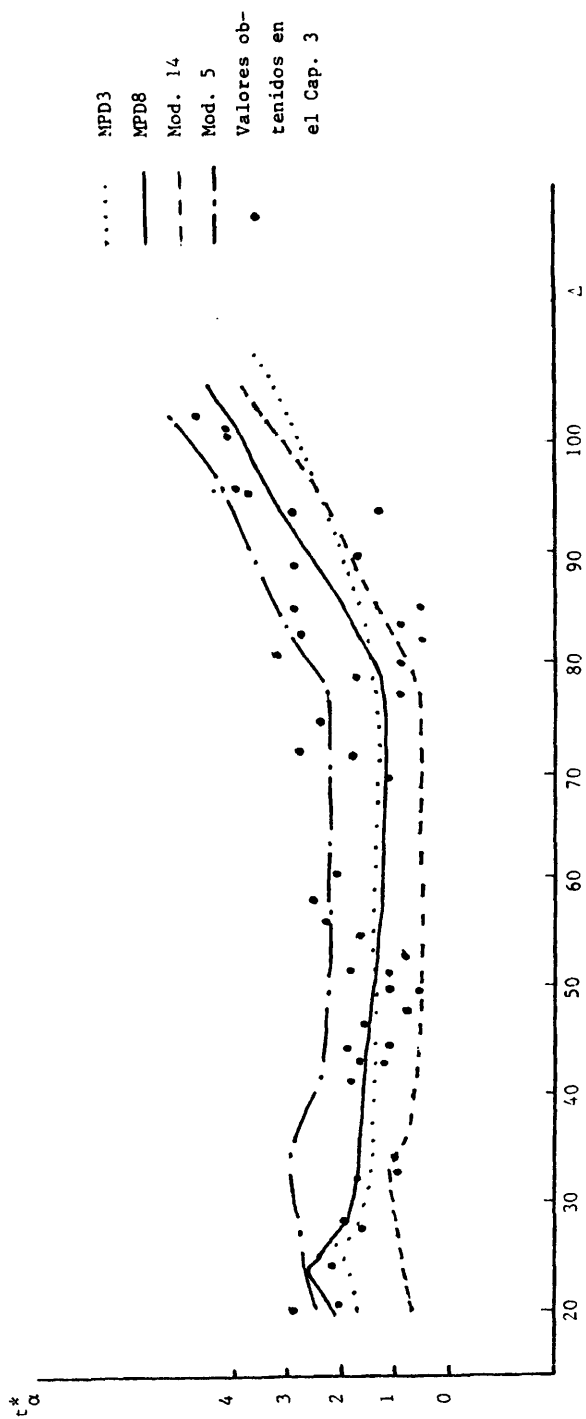


Figura 4-11. Valores de α^* para las ondas de P estudiadas, obtenidas de los modelos 5 y 14 de Mikumo y Kurita (1968) y de los MPD3 y MPD8.

4.7.2.- Modelos obtenidos a partir de ondas superficiales.

En ésta memoria se trata únicamente de la atenuación de ondas internas y no se ha hecho mención de los métodos de obtención de los factores Q_α y Q_β , mediante ondas superficiales (Una revisión clara de los mismos puede verse en el artículo de Sato, 1967). Ahora, y a efectos de comparación, se revisan algunos de sus resultados.

Anderson et al. (1965) presentaron un modelo de Q_β con la profundidad, adoptando un modelo de Tierra continental de Gutenberg para calcular Q_α^{-1} , Q_β^{-1} y Q_L^{-1} ; a partir de éstos valores y los Q_L^{-1} y Q_R^{-1} hallados para ondas de Love y Rayleigh, obtienen los Q_α y Q_β . El modelo de partida era la estructura propuesta por Anderson y Archambeau (1964), con la condición $Q = 450$ en la Corteza (Press, 1964). El valor de Q_β se suponía proporcional a Q_α y tal que $2,5 Q_\beta > Q_\alpha > 1,8 Q_\beta$.

Posteriormente, Anderson y Hart (1978) proponen varios modelos a partir del MM8, en los que ya intentan dar cuenta de los resultados de las ondas internas, superficiales y oscilaciones libres. El modelo SL8 parece el mas satisfactorio de ellos. En la figura 4-12 se comparan los modelos SL8 y MPD8.

Nuestro modelo sugiere unos cambios de la fricción interna, al pasar del Manto Superior al Inferior, mucho mas acusadas que las del SL8. Este último supone que las pérdidas en compresión pura son despreciables ($Q_K^{-1} = 0$) y que todas las pérdidas de energía se deben a cizalla, con lo que $Q_\beta^{-1} = 2,24 Q_\alpha^{-1}$ (MM8). Esta hipótesis no es fácil de sostener de modo teórico, teniendo en cuenta los diferentes mecanismos que pueden dar lugar a disipación de energía sísmica y que serán revisados en el capítulo siguiente. Anderson y Hart señalan que los resultados de la atenuación de los tipos de ondas estudiados, pueden justificarse sin suponer pérdidas en compresión hidrostática; pero en estudios semejantes Sailor y Dziewonski (1978) concluyen que modelos sin disipación en compresión hidrostática no pueden satisfacer los datos de los modos radiales.

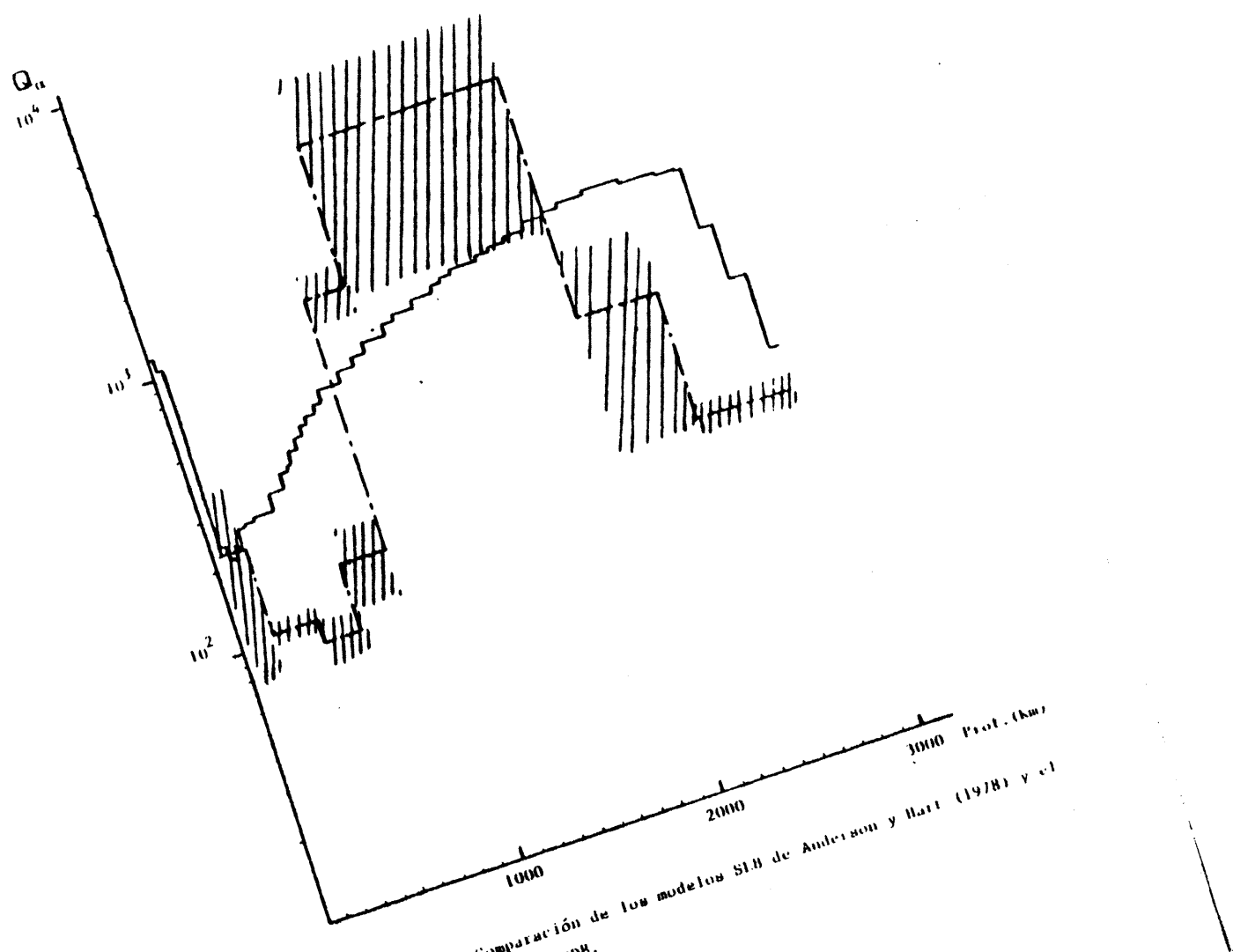


Figura 4-12. Comparación de los modelos SLB de Anderson y Hart (1978) y el modelo MFD8.

4.7.3.- Disipación en la frontera Manto Inferior-Núcleo.

Los bajos valores obtenidos para Q_x en la región mas profunda del Manto, concuerdan con los de Teng y Mikumo. No obstante, la existencia real de una zona de atenuación tan alta, es sujeto de discusión ya que:

a) La difracción de ondas P

b) los efectos de una estructura en capas en dicha región podrían dar lugar a resultados semejantes. Estudios teóricos llevados a cabo por Teng (1967), descartan la posibilidad b).

Para comprobar la influencia de a), se procedió a un nuevo cálculo de la distribución de $Q(r)$ mediante SYSTEQIN y SIMPQIN, en el que no se consideraban aquellas ondas P cuyo punto mas profundo de trayectoria estaba a una distancia inferior a los 200 km de la frontera con el Núcleo (o lo que es igual, ondas registradas en estaciones con distancias epicentrales superiores a 90°).

Los resultados obtenidos para las distintas regiones, eran consistentes con los de los modelos MPD's, excepto en lo que se refiere a la región 10, para la cual se tenía:

$$\begin{aligned} Q_{10}^{-1} &= 0,28 \cdot 10^{-2} & , & & (Q_{10}^{-1}) &= 0,13 \cdot 10^{-3} \\ Q_{10} &= 357 & , & & (Q_{10}) &= 17 \end{aligned} \quad (4-21)$$

y para el Manto Inferior, los factores medios eran:

$$\begin{aligned} Q_{MI}^{-1} &= 0,9 \cdot 10^{-3} & , & & (Q_{MI}^{-1}) &= 0,16 \cdot 10^{-3} \\ Q_{MI} &= 1111 & , & & (Q_{MI}) &= 197 \end{aligned} \quad (4-22)$$

Estos valores, si consideramos que el valor de Q_x en toda la región 10 es el (4-21), nos conduce a un modelo alternativo, en que el valor medio de la atenuación en el Manto Inferior está mas de acuerdo con los de Kanamori, y Mikumo y Kurita, ya mencionados; que los de los modelos MPD's.

Sin embargo, supone una arbitrariedad el considerar sólo una parte

de la región 10 y atribuirle el mismo valor de Q_α que el promedio de toda esa región. Por ello, de los valores (4-21) no se puede concluir que el aumento de Q_α en los últimos 200 km del Manto, sea aparente y debido a efectos de difracción; dicho aumento puede ser real y de los valores (4-21) y del modelo MPD8 (tabla 4-8), se llegaría a la necesidad de suponer unos valores de $Q_\alpha \approx 100$ en la frontera con el Núcleo, que pudieran deberse a la existencia de transiciones de fase. Para llegar a conclusiones válidas sobre la anelasticidad de esta zona, son necesarios estudios teóricos y experimentales sobre superposiciones de ondas P y PoP para distancias epicentrales mayores de 80°.

4.8.- CONSIDERACIONES FINALES

Del conjunto de resultados obtenidos se puede concluir que el modelo de distribución de Q_α en el Manto, cumple con la mayor parte de los objetivos propuestos, puesto que ofrece unos límites a los valores de Q_α en distintas regiones de él dentro de los cuales es probable que esté el valor verdadero. No obstante, el proceso de cálculo, desarrollado en éste y el anterior capítulos, tiene dos puntos críticos que son: a) los valores altos en las desviaciones típicas de los factores $Q(\Delta)$ y b) el mal condicionamiento que como consecuencia de lo anterior, resulta en los sistemas de ecuaciones lineales que nos proporcionan los valores de Q_α en las distintas regiones.

Para lograr una mejora en el cálculo de $Q_\alpha(r)$, mediante ondas P, siguiendo a grandes rasgos el método de relaciones entre amplitudes espectrales, parecen aconsejables algunas mejoras del modelo físico y otras de tipo matemático (de procedimiento).

A. MEJORAS DEL MODELO FISICO

1. Considerar explícitamente la respuesta de la Corteza para cada una de las estaciones registradoras, en el rango de frecuencias que interesa.

2. Estudiar un modelo más complejo de distribución de Q que admita no sólo variaciones radiales, sino también laterales $Q(r, \theta, \varphi)$, que pueden ser muy importantes en el Manto Superior (Barazangi e Isaacks, 1971) y también en la zona más profunda del Manto Inferior.

Estas dos mejoras deberían ir junto con:

B. MEJORAS DEL PROCESO MATEMATICO.

3. De tipo estadístico: a) La consideración explícita del espectro de respuesta de la corteza $C(\omega)$ permitiría ampliar el número de puntos estudiados en el espectro de amplitudes; ya que la limitación impuesta ($\nu_{\max} \sim 0,13 \text{ s}^{-1}$) se debía a que por encima de dicha frecuencia la respuesta de la corteza varía sensiblemente de unos puntos a otros. Con un número mayor de puntos se conseguiría un mejor análisis estadístico de los errores. b) Estudio de un número mucho mayor de terremotos, ésta es una condición indispensable para poder introducir un modelo más complejo, según se ha indicado en el punto 2.
4. Empleo de procedimientos de formulación de soluciones numéricas para problemas lineales, como el de análisis espectral (Parker, 1977), que aislen de modo explícito las partes de la solución bien determinadas por los datos, de aquellas que no lo son. Estos procedimientos son complejos y de difícil implementación en un ordenador y requieren mucho más tiempo de cálculo, no obstante pueden ser muy aconsejables para la determinación de $Q_\alpha(\Delta)$.
5. Para la determinación de $Q(r)$ mediante la solución de la ecuación integral (4-1) puede intentarse un método de Montecarlo, lo que exigiría considerar un número muy grande de ondas P . Sin embargo, el paso crítico en el proceso de determinación de $Q(r)$, es el cálculo de una distribución de $Q(\Delta)$ de menores desviaciones, y hacia

El deben encaminarse los mayores esfuerzos.

Hay que tener presente que mediante el estudio de ondas internas, difícilmente se puede conseguir algo más que un modelo simple de distribución de Q en el Manto. Estos modelos deberán perfeccionarse con estudios basados en ondas superficiales y modos normales de oscilaciones libres; los primeros nos permitirán indagar sobre la estructura del Manto Superior y los segundos son un complemento indispensable si se desea determinar estructuras disipativas para deformaciones de compresión hidrostática - factor Q_k -, o de cizalla pura - factor Q_μ (la definición de éstos factores se verá en el capítulo 8).

C A P I T U L O 5

MECANISMOS DE ANELASTICIDAD DE LA TIERRA

5.1.- INTRODUCCION

Las propiedades elásticas de un sólido están controladas por las fuerzas que se ejercen entre si los átomos de su red cristalina y en primera aproximación, solo son funciones del volumen molar. Presión, temperatura, polimorfismo etc. afectan a estas propiedades elásticas a través de la densidad.

La anelasticidad de los sólidos, viene determinada fundamentalmente por las propiedades termodinámicas y defectos de estructura de esos sólidos. Al considerar la atenuación de las ondas internas en el interior de la Tierra, nos hemos de centrar en aquellos mecanismos que sean válidos en materiales policristalinos a las frecuencias de estas ondas sísmicas (10^{-4} - 1 Hz) y a temperaturas y presiones muy elevadas, que son las condiciones del problema que estamos estudiando.

En Geofísica, el estudio de la atenuación puede hacerse de modo fenomenológico. Así Knopoff y McDonald (1960) consideran tres tipos de mecanismos que conducen a una fricción interna independiente de la frecuencia, para frecuencias menores de 10^6 c.p.s. De este modo, obtienen para policristales una fricción interna, por lo menos, un orden de magnitud mayor que en monocristales. No obstante, apenas dedican atención a los mecanismos fundamentales (atómicos o moleculares) que dan lugar a ese comportamiento.

Otro modo de enfocar el problema, es considerar estos mecanismos microscópicos e intentar explicar el comportamiento macroscópico anelástico mediante ellos. Aquí se presenta el grave problema de la dificultad de conseguir en el laboratorio presiones y temperaturas tan altas como las del interior de la Tierra y materiales en parecido estado

de agregación y composición, así como de realizar medidas de bajas frecuencias a tan altas presiones.

Si tenemos en cuenta los mecanismos fundamentales que dan lugar a la disipación de energía elástica en los sólidos, los podemos dividir en:

- 1.- Mecanismos de interacciones elementales.
- 2.- " de rozamiento mecánico.
- 3.- " termoelásticos.
- 4.- " de dislocaciones.
- 5.- " de difusión.
- 6.- " en fronteras de granos.
- 7.- " debidos a fusión.
- 8.- " activados a altas temperaturas.

Jackson y Anderson (1970) hacen un examen minucioso de estos mecanismos y en la revisión que ahora hacemos, nos apoyamos parcialmente en su estudio.

Si en un sólido actúan N mecanismos simultáneamente y son lineales e independientes entre sí, la fricción interna resultante será la suma de la debida a cada mecanismo.

$$Q_{\text{total}}^{-1} = \sum_{j=1}^N Q_j^{-1} \quad (5-1)$$

En general se puede reducir mucho el número de mecanismos responsables de la fricción interna mediante una simple consideración de órdenes de magnitud en (5-1).

En el resto de este Capítulo haremos un repaso de estos mecanismos y su posible validez en la Tierra. Como ya se indicó tendrán que ser operativos a altas temperaturas y presiones, a bajas frecuencias (sísmicas) y dar explicación a las cuatro condiciones impuestas por los datos sísmicos que veíamos en la sección 2.2.

5.2.- FRICCIÓN INTERNA DEBIDA A INTERACCIONES ELEMENTALES.

Mediante el empleo de microondas de 10^9 a 10^{11} o.p.s, se estudia: a) la anarmonicidad de los cristales, debida a la interacción de tres fonones, con lo que se introducen términos cúbicos en la energía potencial elástica de la red, del tipo: $A \epsilon_{ij} \epsilon_{lm} \epsilon_{nk}$. b) las interacciones electrón - fonón.

a) La anarmonicidad representa la interacción de una onda elástica con las ondas térmicas de la red. La onda elástica varía por interacción anarmónica la distribución térmica de las frecuencias de los fonones y por tanto, la distribución de Boltzmann de las energías de estos fonones térmicos, con lo que resulta una modificación de la energía elástica que se nos manifiesta como atenuación.

b) La interacción electrón-fonón, tiene una base análoga. Cuando se desplaza un electrón se produce una distorsión local de los iones, que modula en parte las propiedades elásticas del cristal. A la inversa, una onda elástica, cambia la densidad local de átomos y modula por ello las propiedades eléctricas del sólido.

Como introducción a estos temas, pueden consultarse los capítulos 5 y 6 del libro de Kittel (1968) y para un estudio posterior el de Ziman (1960).

Estos mecanismos no pueden considerarse importantes en el interior de la Tierra para las ondas sísmicas, pues a altas temperaturas operan a frecuencias mucho más altas que las sísmicas ya que las frecuencias de vibración térmica a esas temperaturas son del orden de 10^{14} Hz.

Entre estas interacciones elementales, habría que considerar las de tipo electromagnético que transforman energía elástica en energía electromagnética. Según Knopoff y McDonald (1960) estos parecen secun-

darios en la Tierra.

5.3.- FRICCIÓN INTERNA DEBIDA A EFECTOS MECANICOS DE ROZAMIENTO

Los mecanismos basados en rozamientos entre sólidos se supone que obedecen la ley de Amonton (Orowan, 1967)

$$\tau = K_f p$$

siendo: τ : tensión de fricción; K_f : coeficiente de fricción y p : presión normal entre las superficies.

Esta ley proporciona un factor Q^{-1} independiente de la frecuencia, pero que depende del inverso de la amplitud del movimiento si el cuerpo que oscila es elástico según Hooke.

Walsh (1966). estudia la disipación de energía por rozamiento en hendiduras y grietas y sugiere que una fricción interna, Q^{-1} , debida a rozamientos en pequeñas hendiduras y grietas, debe ser el resultado de la proporcionalidad de la presión de las paredes, y por lo tanto de la tensión de fricción, respecto de la amplitud de la onda elástica. Este mecanismo puede explicar resultados experimentales obtenidos en zonas a bajas presiones y da lugar a una fricción interna independiente de la frecuencia y que depende de la amplitud y de la presión de modo decreciente.

Este efecto de la presión, puede comprenderse si tenemos en cuenta que para que las bajas tensiones transversales sísmicas produzcan un deslizamiento en grietas, las diferentes zonas en las grietas, no deben hallarse excesivamente ligadas, lo que sucede a presiones ~ 10 kbars.

Debido a este hecho, éste mecanismo no debe tenerse en cuenta en el interior del Manto. Quizás pueda ser de importancia en las zonas más superficiales de la Corteza.

5.4.- FRICCION INTERNA DEBIDA A TERMOELASTICIDAD

Este mecanismo, que ha sido muy bien estudiado desde el punto de vista clásico, se basa en que la variación en la deformación de un cuerpo, da lugar a una variación en la temperatura, lo que causa un flujo de calor. Esto conduce a una disipación de energía de vibración por unidad de volumen que según puede verse en el Cap V de la Teoría de la Elasticidad de Landau (1969), es igual a:

$$\Delta E_{\text{int}} = -\frac{\chi}{T} \int_0^{2\pi\omega} (\nabla T)^2 dt \quad (5-2)$$

Dado que $\nabla T \propto \epsilon_{ii}$, este tipo de mecanismo únicamente da lugar a absorción de energía en el caso de ondas longitudinales:

Para materiales policristalinos, caso del Manto y a frecuencias sísmicas se verifica: $v/a \gg \omega \gg a^2/\chi$
donde: a es el tamaño medio de los granos.

$\chi = \kappa/C_p$ conductividad termométrica.
y a^2/χ es el tiempo de relajación para la conducción térmica en los granos. La fórmula para la fricción interna es: (T.E. Landau)

$$Q^{-1} \approx \frac{4\pi T \alpha^2 \rho C^2 \sqrt{\chi}}{a C \sqrt{\omega}} \quad (5-3)$$

En estos materiales policristalinos, las diferencias adiabáticas de temperatura, surgen debidas a condiciones de contorno en los límites de grano durante el paso de las ondas según señala Zener (1948)

El orden de magnitud de (5-3) es poco preciso, aunque para valores razonables de las magnitudes que intervienen, es al menos un orden de magnitud menor que el obtenido experimentalmente. Magnitisky y Zarkov (1969) indican que la dependencia respecto a la frecuencia como $\omega^{1/2}$ es bastante aceptable.

No obstante, el hecho de que este mecanismo no conduzca a atenuación de las ondas transversales, lo invalida como posible mecanismo fundamental.

5.5.- FRICCIÓN INTERNA DEBIDA A DISLOCACIONES

Las dislocaciones, como defectos lineales o unidimensionales de los sólidos, pueden estudiarse desde un punto de vista macroscópico como en el libro T.E. de Landau (1969) o de un modo microscópico, Friedel (1964). Su existencia y movilidad explica los pequeños valores de las tensiones críticas de cizalladura en los cristales reales.

Un hecho que las distingue de los otros tipos de defectos (puntuales) de los sólidos, es que no son activados térmicamente debido a la alta energía de formación por unidad de longitud (~ 8 eV por plano atómico atravesado por la dislocación).

Ahora vamos a considerar su importancia en las propiedades anelásticas de los materiales policristalinos. Hay tres formas de disipación de energía asociadas al mecanismo de dislocaciones: Histéresis, Resonancia y Relajación.

5.5.1.- Histéresis

La histéresis se halla relacionada con cambios en el sólido que no se recuperan totalmente si invertimos la magnitud que produce ese cambio. Para el caso de la anelastividad, la curva que relaciona las tensiones y deformaciones en un ciclo describe un "ciclo de histéresis" cuya área es la energía perdida en ese periodo de tiempo.

Granato y Lüke (1956) proponen un fenómeno de este tipo debido a un mecanismo de dislocaciones. Según éste, la disipación de energía se debe al trabajo realizado por las tensiones de cizalla aplicadas, para desprender las dislocaciones de las impurezas que las mantienen ancladas. Este mecanismo, conduce a una fricción interna dependiente de la amplitud y no opera a tensiones menores que una umbral necesaria para desprender las dislocaciones.

Si el número de segmentos de dislocación anclados por unidad de volumen y de longitud entre l y l viene dado por:

$$N(\ell)d\ell = (\Lambda/\ell^2) \exp(-\ell/L) d\ell$$

donde $\Lambda(\text{cm.}^{-2})$, es la densidad de dislocaciones y $L(\text{cm.})$, es la longitud media del lazo.

Según Nibblot y Wilks (1960), el mecanismo propuesto predice una fricción interna:

$$Q^{-1} = (Aa/L^2\epsilon) \exp(-Ba/L\epsilon) \quad (5-4)$$

Siendo a el espaciado reticular y ϵ la amplitud de la deformación y A y B constantes que dependen de la orientación y densidad de dislocaciones.

Este tipo de mecanismo, posee entre otras dos propiedades importantes:

- 1.- El aumento en la concentración de impurezas disminuye este tipo de fricción interna, ya que las dislocaciones quedan más ligadas y disminuye la probabilidad de desanclaje por parte de las tensiones aplicadas.
- 2.- Para temperaturas altas, la energía térmica es suficiente como para que las dislocaciones estén desancladas, por lo que la fricción interna debida a este mecanismo disminuye con la temperatura.

Aunque Jackson y Anderson (1970) recomiendan un estudio más profundo de la densidad de dislocaciones en el Manto y de los efectos de la presión en este mecanismo, estas dos propiedades hacen que sea poco probable como mecanismo importante en el interior de la Tierra debido a las altas temperaturas y al aumento de concentración de impurezas que sigue al de la temperatura; por lo que en el interior del Manto apenas parece ser operativo.

5.5.2.- Resonancia.

Las dislocaciones, tambien pueden dar lugar a una atenuación por resonancia. Granato y Lüke (1956) señalan que una dislocación anclada en sus dos extremos puede actuar análogamente a una cuerda de violín. Así, por efecto de la aplicación de una fuerza externa $F.e^{i\omega t}$, se produce una oscilación forzada con amortiguamiento. El movimiento de la dislocación está descrito por la ecuación:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t}$$

donde, x es el desplazamiento normal de la dislocación; m , su masa efectiva y β la fuerza restauradora por unidad de velocidad.

El valor obtenido por Van Bueren (1961) para la fricción interna es:

$$Q^{-1} = C_1 \Lambda L^4 \frac{\beta\omega}{\mu b^2} \left[1 + C_2 L^2 \frac{m\omega^2}{\mu} - C_3 L^4 \frac{\beta^2\omega^2}{\mu^2 b^2} \right] \quad (5-5)$$

C_1, C_2, C_3 , son constantes comprendidas entre 1 y 10, Λ es la densidad de dislocaciones por cm^2 y b el vector de Burgers de la dislocación.

Orowan (1967) apunta que este mecanismo no puede ser válido, porque las dislocaciones no pueden vibrar y disipar energía proporcionalmente a su velocidad. Esto implicaría que el segmento podría moverse bajo cualquier tensión por pequeña que fuese y esto va contra la existencia de la tensión de rozamiento de "Peierls-Nabarro", independiente de la velocidad.

De cualquier modo, aunque fuese válido, solo sería de cierta importancia a frecuencias mucho más altas que las sísmicas. Esto unido al hecho de que solo da lugar a la atenuación de ondas transversales, nos induce a pensar que no es significativo este mecanismo en el Interior de la Corteza y el Manto.

5.5.3.- Relajación.

El mecanismo de dislocaciones que da lugar a este tipo de

pérdidas de energía, está relacionado con la formación térmicamente activada de codos o eslabones en la línea de dislocación, que la permiten saltar de una fila densa de átomos a otra salvando una barrera potencial de Peierls.

Una tensión transversal, puede mover la dislocación de un valle de potencial a otro por movimientos transversales de estos eslabones o codos. La energía de activación de este proceso es proporcional a la altura de la barrera de Peierls y a la longitud de la línea de dislocación.

Una tensión periódica, produce fluctuaciones en la distribución de codos, acompañada por una disipación de energía que es máxima cuando la frecuencia de la tensión aplicada es aproximadamente igual a la frecuencia de formación térmica de los codos. Esta es la llamada "fricción interna de Bordoni o de bajas temperaturas", pues en metales f.c.c. se observa a temperaturas 100°K para $\nu \sim 10^3$ a 10^6 ciclos/seg.

Según Jackson y Anderson, Chang encuentra para el Al_2O_3 a altas temperaturas, un pico en la fricción interna que puede ser de Bordoni, aunque no hay ninguna evidencia de ello.

Si nos fundamos en los datos más seguros, la relajación de Bordoni ocurre en materiales muy deformados y a unas temperaturas muy inferiores a las del Manto terrestre. Por ello aunque puede ser operativo en la Corteza, tal como señala Mason (1969); no parece que tenga lugar en el Manto.

5.5.4.- Resumen.

De todo lo dicho sobre mecanismos basados en dislocaciones, podemos concluir que hay razones importantes para no considerarlos como la principal causa de la anelasticidad de la Tierra.

Sin necesidad de calculos complejos se puede intuir algo así,

ya que las dislocaciones, dada su estructura atómica, solo se mueven con facilidad en su plano de deslizamiento bajo tensiones transversales τ_{ij} . Por lo tanto, si suponemos que el mecanismo fundamental de atenuación es debido a dislocaciones llegaríamos a la inexistencia de pérdidas en compresión pura ($Q_K^{-1} = 0$). Esta idea, sostenida por Anderson y Hart (1978) es discutida por muchos autores que consideran que las pérdidas en compresión no son en absoluto despreciables, sino que son del orden de las pérdidas de cizalla - ver Kanamori (1967), Teng (1968), Sailor y Dzierwonski (1978). El presente trabajo participa de esta segunda hipótesis ya que se obtiene una $Q_\alpha^{-1} \approx Q_\mu^{-1}$ (o $Q_K^{-1} \approx Q_\mu^{-1}$), mediante el mecanismo propuesto en el capítulo 6.

5.6.- FRICCIÓN INTERNA DEBIDA A DIFUSIÓN

La relajación de tensiones se debe a veces a la reordenación de átomos en las posiciones de energía de Gibbs más baja. Podemos considerar dos tipos de difusión: una de corto alcance y otra debida a impurezas.

En la primera, la reordenación tiene lugar por difusión sobre pocas distancias atómicas y el tiempo de relajación para estos procesos viene determinado por la movilidad de los átomos, por lo que depende fuertemente de la temperatura. Como introducción al problema de la difusión en sólidos pueden consultarse los libros de Wert y Thomson (1969) y el de Brophy, Rose y Wulf (1968).

Zener (1948), estudia la anelasticidad debida a la difusión mediante la introducción de potenciales termodinámicos ortogonales, cada uno de los cuales se relaja de un modo peculiar contribuyendo a la fricción interna. Intuitivamente podemos comprender el tratamiento formal que hace Zener.

Si sobre un sólido actúan tensiones τ_{ij} éstas dan lugar a una

deformación ϵ_{ii} instantánea; pero, en una solución sólida como el SiO_3Fe , si los átomos del soluto son mayores que los del solvente, tienden a difundirse en las regiones dilatadas dando lugar a una deformación adicional ϵ'_{ii} . Análogamente, si los átomos de soluto son más pequeños, las vacantes se difunden hacia zonas de compresión, dando lugar a una ϵ''_{ii} . En ambos casos, tiene lugar un fenómeno de relajación y se produce un efecto anelástico ya que la deformación depende del tiempo.

El otro tipo de difusión, es debido a la asimetría que los defectos puntuales causan en una red cristalina sometida a tensiones. Se produce entonces, una difusión hacia posiciones de menor energía y como en el otro tipo de difusión tiene lugar un efecto anelástico.

Si en un sólido existen varios tipos de defectos, cada uno de ellos puede causar fricción interna de este tipo (relajación), que aumentará con el número de impurezas y alcanzará un máximo cuando la frecuencia de salto sea igual a la de la onda de tensiones aplicada.

En el caso de difusión inducida por esfuerzos y su validez en el interior de la Tierra para ondas sísmicas, hay que tener en cuenta tres hechos:

- 1) Este mecanismo opera principalmente para ondas de compresión.
- 2) Para que sea importante en el Manto, se requeriría un tamaño de grano muy pequeño 10^{-4} cm. (Jackson y Anderson, 1970) (1)
- 3) No se ha podido identificar en el laboratorio este tipo de relajación en óxidos y silicatos.

En el caso de difusión debida a defectos puntuales el periodo de relajación por difusión es:

$$\tau = \tau_0 \exp (G^{\ddagger} / kT)$$

τ_0 : periodo de vibración térmica 10^{-12} a 10^{-14} seg., y G^{\ddagger} : la

(1) Existen razones de tipo físico, como es el lento proceso de formación del Manto a altas temperaturas, que a la luz de los conocimientos que se poseen sobre nucleación y crecimiento de granos, hacen más probables tamaños de grano de varios metros (Orowan, 1967)

energía de Gibbs del proceso de difusión (diferencia de energías entre el estado activado y el original): $G^* = H^* - TS^*$

Puede verse que en el interior de los granos de un policristal, el periodo de relajación, sólo tendrá importancia a frecuencias muy superiores que las correspondientes a las ondas sísmicas.

Teniendo en cuenta estas características del mecanismo de difusión, no parece que en el interior de los granos, pueda ser importante en la atenuación de las ondas sísmicas. No obstante, Gordon (1967), Jackson y Anderson (1970) y otros autores piensan que la difusión de impurezas en fronteras de grano, puede ser un mecanismo a considerar en la anelasticidad de la Tierra, pero se requiere un conocimiento mucho más profundo de la estructura y composición del Manto, así como del tamaño de los granos, para abordar el problema de un modo más riguroso.

5.7.- FRICCIÓN INTERNA EN FRONTERAS DE GRANO

Un cristal real, puede considerarse constituido por un gran número de cristales pequeños, desorientados unos respecto de otros o bien de distinta estructura. Como es lógico, la zona próxima a la frontera, es una región de transición, en la que las propiedades son distintas a las del interior de los granos. Debido a esto, hay autores que definen estas fronteras, como zonas de impurezas, alta deformación, desorden general o fusión parcial. Burgers emite la hipótesis de que la unión de granos de desorientación pequeña, se forma mediante una red de dislocaciones. Vogel, comprobó la validez de esta hipótesis para ángulos menores de 30°. En los policristales existen relajaciones activadas térmicamente, relacionadas con mecanismos de relajación de tensiones en fronteras de grano. Así en muchos metales puros la energía de activación para autodifusión cerca de los bordes de grano, es aproximadamente la mitad de la autodifusión en volumen, sugiriendo que el pico de rela-

relajación está relacionado con difusión en fronteras de grano inducida por las tensiones.

En esta zona de cambio de propiedades físicas de cristales, cuando éstos se hallan sometidos a tensiones, habrá que tener en cuenta:

- a) Debido a la concentración de tensiones en los límites de grano, estos pueden deformarse por movimiento de dislocaciones.
- b) Las impurezas tienden a concentrarse en estas fronteras, ya que en ellas los átomos están menos enlazados. Por esto, estas zonas pueden actuar como fuentes de impurezas.

Kê (1948) y Zener (1948) intentan explicar la relajación en los bordes de grano, suponiendo la existencia en ellos de una capa viscosa. Encuentran picos de atenuación para frecuencias ~ 1 Hz a temperaturas $\sim 300^\circ\text{C}$. Estos picos son muy agudos y tienen lugar a las temperaturas y frecuencias a las que comienza el deslizamiento viscoso en dichas fronteras de grano.

No existe una teoría completa de la atenuación en límites de grano y la explicación mediante una capa viscosa según distintos tipos de viscosidad (Orowan 1967), no es totalmente satisfactoria. Lo que sucede es que al ser las energías de enlace por átomo distintas en los bordes que en el interior de los granos, los mecanismos que operan en el interior, también lo harán en las fronteras pero con unas características peculiares. Pienso que más que mecanismos de límites de grano, se debe hablar de mecanismos en fronteras de grano.

Jackson y Anderson, señalan la relajación en límites de grano, como uno de los mecanismos más probables de anelasticidad de la Tierra, junto con una fricción interna desconocida activada térmicamente. Sin embargo, se requiere una investigación mayor de las propiedades en bordes de grano (como energías de activación de los distintos procesos y

efectos de la presión en dichas zonas), para materiales similares a los del Manto, antes de decidir si el papel de los límites de grano es tan importante en la atenuación de ondas sísmicas como se cree.

5.8.- FRICCIÓN INTERNA CAUSADA POR FUSIÓN PARCIAL

La fusión en materiales policristalinos, comienza en los bordes de grano a veces a temperaturas bastante inferiores a la de fusión del interior del grano. Este efecto es debido a impurezas acumuladas en las fronteras durante la solidificación inicial.

Varios estudios sísmicos, han indicado que las ondas sísmicas transversales, experimentan una gran atenuación bajo zonas volcánicas. McGinley y Anderson (1969) comprobaron que la variación de Q_p^{-1} en distintas zonas de Estados Unidos, es de un orden de magnitud. Las ondas P resultaban mucho menos afectadas por variaciones regionales. Todo esto sugiere que la fusión parcial podría ser la causa fundamental de estas zonas de bajas velocidades y alta atenuación como ya se indicó en la Secc.(2-4). Si así fuera, las variaciones de Q_p^{-1} nos podrían facilitar un mapa térmico del Manto Superior.

Walsh (1968, 1969) calculó la fricción interna para dos modelos fenomenológicos de sólido parcialmente fundido. Estos modelos incluían solamente efectos mecánicos e ignoraban atenuaciones de otro tipo en sistemas de dos fases. Llegó a un mecanismo de relajación activado por la temperatura y comparable al de viscosidad en fronteras de grano de Kê y Orowan, que da lugar a una atenuación despreciable para ondas compresionales puras a frecuencias sísmicas y tal que para ondas de cizalla el material exhibe las propiedades de un sólido lineal standard, con un tiempo de relajación que depende de los módulos de compresibilidad y rigidez de la fase sólida y rigidez de la líquida. En las ecuaciones que se obtienen para Q_a^{-1} y Q_p^{-1} la incógnita fundamental es la concentración de la fase fundida como función de la presión y de la tempe

ratura. Concentraciones $\sim 10^{-5}$ podrían dar lugar a una atenuación apreciable en el Manto.

Este mecanismo, para el que el modelo de Walsh resulta insuficiente, puede ser importante a bajas frecuencias debido a la probable existencia de una zona de fusión parcial en el Manto Superior.

5.9.- FRICCIÓN INTERNA TÉRMICAMENTE ACTIVADA

Con este término, expresamos el hecho de que muchos datos experimentales obtenidos en el laboratorio, sugieren que, sin tener en cuenta el mecanismo específico, este puede describirse probablemente como un proceso térmicamente activado. Entonces, al menos parte de la dependencia de la fricción interna respecto a la presión y la temperatura, puede describirse de un modo muy general según indica Smith (1972):

$$Q^{-1} = A(p, T) \exp \left(- \frac{E^* + pV^*}{kT} \right) \quad (5-6)$$

donde E^* y V^* son las energías y volúmenes de activación asociadas al proceso considerado en el sólido.

Este tipo de fricción interna, se observa tanto en cristales como en polioristales, aunque como ya se indicó en la Secc. (2-1) en estos es un orden de magnitud mayor. En la ecuación (3-6) podemos ver que Q^{-1} aumenta rápidamente cuando nos acercamos a la temperatura de fusión. Esto ha llevado a algunos autores a considerar que los mecanismos responsables de ambas, están conectados de alguna manera. Según Jackson y Anderson (1970), Nachtrieb propone que la fusión tiene lugar cuando la densidad de vacantes móviles en la red alcanza un valor crítico. Esto supondría que las gráficas $Q^{-1}(T_f/T)$ para distintos sólidos serían rectas de la misma pendiente, en contra de lo que se encuentra experimentalmente. Lo que indica que o los mecanismos de fusión y fricción interna son distintos, o la concentración de vacantes móviles varía mucho de unos sólidos a otros.

La presencia de este tipo de fricción interna en materiales deformados como Al_2O_3 y su ausencia o disminución en los no deformados, parece indicar la influencia de las dislocaciones, pese a no ser térmicamente activadas.

Así mismo, la diferencia entre las fricciones internas de muestras policristalinas y cristales simples indica que el mecanismo responsable de esta fricción interna activada térmicamente depende fuertemente de la existencia de fronteras de grano, donde la densidad de dislocaciones e impurezas es más alta y donde estas pueden precipitar en una fase amorfa.

Jackson y Anderson han recopilado diversos valores del parámetro E^* para algunos óxidos, silicatos y vidrios, aunque para estos dos últimos hay pocos valores precisos. La dificultad de la determinación de estas energías de activación es considerable y aún hay que estudiar los efectos del tamaño de los granos en esta fricción interna térmicamente activada que parece importante en la atenuación de ondas sísmicas, en el interior del Manto.

5.10.- RESUMEN

Después de la revisión que se ha efectuado a los distintos mecanismos, aparecen como más probables en la atenuación de ondas sísmicas internas los de Relajación en Fronteras de Grano, Fusión Parcial y ese desconocido "background" térmicamente activado. Aunque respecto alguno de ellos, eso quizá se deba a que al ser peor conocidos que los demás aún no se ha podido encontrar ninguna razón fuerte en contra que los invalide.

De los varios mecanismos que posiblemente contribuyen a la atenuación observada, el dominante puede variar con la profundidad según varíen distintos parámetros físicos como la presión, temperatura, composición, etc. Respecto a la dependencia con la frecuencia de la fricción

interna, puede suceder que para una región determinada sea practicamente insensible a ω aún cuando ésta zona esté compuesta por cristales con iones distintos que den lugar a una Q^{-1} dependiente fuertemente de la frecuencia. Ello se debe a que el conjunto de energías de activación implicadas en el proceso de atenuación puede ser tal que la distribución de relajaciones sea de Becker (Orowan, 1967). Por ello, del hecho de la fuerte dependencia respecto de la frecuencia de un mecanismo en un sólido simple, no se puede deducir que dicho mecanismo al considerar un sólido mucho más complejo, vaya a producir una dependencia fuerte de ω que lo desoarte como posible mecanismo atenuador de energía de las ondas sísmicas internas.

C A P I T U L O 6

SOBRE UN POSIBLE MECANISMO DE ANELASTICIDAD, DEBIDO A DEFECTOS

PUNTUALES

6.1.- INTRODUCCION

En el capítulo anterior, se revisaron distintos mecanismos que conducen a una pérdida de energía elástica en los sólidos y su posible validez como responsables de la atenuación de las ondas sísmicas en el interior de la Tierra.

En este capítulo, se propone un mecanismo que da lugar a una fricción interna activada con la temperatura. La hipótesis fundamental en que se basa es que, durante un periodo, en un cristal sobre el que se realiza un trabajo elástico medio por unidad de volumen, se produce una perturbación en las energías de los átomos del mismo, lo que da como resultado un incremento en el número de defectos puntuales. La variación de la energía de Gibbs asociada a este aumento nos da la disminución o disipación de energía elástica de la onda de tensiones que efectúa el trabajo medio por periodo; lo que nos permite obtener una expresión para la fricción interna debida a este mecanismo.

Aunque se realizan importantes simplificaciones para la obtención de esta expresión y a partir de ella, de un modelo teórico de distribución de Q con la profundidad, como se verá en el próximo capítulo, éste modelo parece explicar los aspectos cualitativos de la anelasticidad del Manto, en el caso límite de una Tierra supuesta homogénea y en el que la naturaleza policristalina sólo se tiene en cuenta mediante coeficientes correctores.

6.2.- DEFECTOS PUNTUALES EN LOS SOLIDOS

Anteriormente, ya hemos considerado imperfecciones unidimensiona

les o lineales (dislocaciones), e imperfecciones bidimensionales o superficiales, como son las fronteras de grano.

Una imperfección puntual, es una interrupción muy localizada en la regularidad de la red. Como regla, aparece una de estas imperfecciones en tres casos:

1. Cuando falta un átomo que estaría presente en un cristal perfecto: Vacante
2. Cuando un átomo de la red ocupa una posición incorrecta: Defecto Intersticial
3. Cuando un átomo de impureza, ocupa la posición correspondiente a un átomo de la red: impureza o defecto substitucional.

Existen otros defectos puntuales más complejos, como son: grupos de vacantes condensadas, asociación de defectos intersticiales con vacante aniónica o defecto de Frenkel, vacante catiónica y aniónica asociadas o defecto de Schottky. Puede hacerse un estudio elemental en los libros de Wert y Thomson (1967) y Kittel (1968) y más avanzado en el de Van Bueren (1960).

6.2.1. Vacantes

Vamos a efectuar el estudio de la distribución de equilibrio de vacantes en un cristal, pues será el problema central en el mecanismo que se propone.

Se crea una vacante en un cristal perfecto, transfiriendo un átomo de un lugar en el interior a la superficie. Un simple razonamiento nos hace ver que para esta transferencia se necesita una energía ya que el átomo pasa a estar menos enlazado. Se denomina por E_v , la energía de formación de una vacante y viene determinada por el número de enlaces que se pierden al pasar el átomo del interior a la superficie.

En el equilibrio térmico a temperatura T , un cristal que en

otros aspectos puede ser perfecto, posee siempre cierto número de vacantes ya que la entropía aumenta por aumentar el desorden en la estructura. La energía libre de un cristal perfecto (ficticio), si suponemos la presión despreciable frente a las fuerzas interatómicas, está representada por:

$$F_p = E_p - T S_p$$

donde la energía E_p comprende la energía de cohesión y de vibración. La entropía S_p , es entropía térmica ya que en un cristal perfecto la de configuración es igual a 0.

Consideremos un cristal real que contenga n vacantes. El aumento de energía interna asociada con estas n vacantes aisladas y que suponemos no interaccionan entre si es: $\Delta E = nE_v$, siendo E_v la energía necesaria para la formación de una vacante. Su entropía configuracional es entonces: (Capítulo 18 del libro de Kittel, 1968)

$$S_c = k \ln \left[\frac{N!}{(N-n)! n!} \right] \quad (6-1)$$

El término entre paréntesis representa el número de formas en que podemos colocar $(N-n)$ átomos y n vacantes en N posiciones de la red. Si se emplea la aproximación de Stirling: $\ln n! \approx n \ln n - n$ para $n \gg 1$, se obtiene:

$$\ln \frac{N!}{(N-n)! n!} = N \ln N - (N-n) \ln (N-n) - n \ln n \quad (6-2)$$

La energía libre del cristal real será

$$F_R = F_p + n E_v - T (S_R - S_p) - kT \ln \left[\frac{N!}{(N-n)! n!} \right] \quad (6-3)$$

siendo S_R la entropía térmica del cristal real y si definimos el aumento de entropía térmica resultante de la creación de una vacante, ΔS_t , por:

$$n \Delta S_t = S_R - S_p$$

En el equilibrio, a una temperatura dada y en un sistema sobre el que no se realiza trabajo externo, la energía libre es mínima res-

pecto a variaciones de n . Haciendo $(\partial E_{\Sigma n}) = 0$ en (6-3) y teniendo en cuenta que $n \ll N$, se obtiene:

$$n = N \exp \left[\Delta S_t / 2k - E_v / kT \right] \quad (6-4)$$

El factor esencial es el de Boltzmann E_v / kT . El factor exponencial que contiene el cambio de entropía térmica por vacante ΔS_t , puede calcularse tomando como base un modelo particular. Si tomamos el modelo de Einstein, siendo ν la frecuencia de Einstein asociada de los iones en la red perfecta y ν' la frecuencia de Einstein de un ion próximo a la vacante ($\nu' < \nu$). Puede verse fácilmente (Dekker, 1957) que:

$$S_R = S_p + 62 n k \ln (\nu / \nu') \quad (6-5)$$

Z = nº de vecinos más próximos

sustituyendo (6-5) en (6-4) se tiene para la concentración de equilibrio

$$n/N = K \exp \left(- \frac{E_v}{kT} \right) ; \quad K = (\nu / \nu')^{3/2} \quad (6-6)$$

El cambio de entropía térmica favorece la formación de vacantes ya que $\nu / \nu' \geq 1$. No obstante muchos autores, como Kittel (1968) consideran en (6-6) $K = 1$ en primera aproximación; según esa fórmula y para valores habituales de E_v (entre 0,7 y 1 eV), la concentración de equilibrio depende fuertemente de la temperatura.

Hay procesos mas complejos, como la formación de pares de vacantes de distinto signo (defectos de Schottky). Este fenómeno es muy importante en los cristales iónicos en los que la tendencia a evitar acumulación de cargas espaciales hace que contengan, en la práctica, el mismo número de vacantes positivas que negativas. En este caso, el número final de pares de vacantes viene determinado por la suma de las energía de formación de vacantes de iones positivos y negativos.

$$\phi = E_v^+ + E_v^-$$

siendo ϕ - energía de formación del par.

Si rehacemos el cálculo que condujo a (6-6) teniendo en cuenta que al calcular la entropía configuracional, sirve la misma expresión (6-1) para iones positivos y negativos, se tiene:

$$\frac{n}{N} \approx \kappa' \exp \left(- \frac{\phi}{2kT} \right) \quad (6-7)$$

La importancia de este fenómeno en el Manto es evidente, si como apuntan la mayor parte de investigadores, está muy fundamentalmente compuesto por sólidos de carácter marcadamente iónico.

En el Apéndice B, se puede ver un cálculo aproximado de las energías de formación de vacantes E_V^+ y E_V^- en el caso de una estructura iónica muy simple, cúbica centrada en las caras.

6.2.2. Defectos intersticiales e impurezas sustitucionales

Estos son los otros tipos de defectos simples que consideraremos. Nuevamente, al formarse un defecto intersticial se produce un incremento de la energía del cristal E_i , ya que este es añadido en una región; donde son muy fuertes las fuerzas repulsivas entre el átomo insertado y sus vecinos. De modo análogo, un átomo de impureza sustitucional al ser de distinto tamaño distorsiona la red y se produce un incremento de energía por impureza E_s .

El cálculo de la concentración de equilibrio es igual que para las vacantes siendo los valores:

$$\begin{aligned} n_i &\approx (NN')^{1/2} \exp \left(- E_i/kT \right) \\ n_s &\approx N \cdot \exp \left(- E_s/kT \right) \end{aligned} \quad (6-8)$$

Donde N' es el número de posiciones de inserción .

En general $E_{i(s)} \sim 3 \cdot E_V$, para empaquetamientos compactos y por esto su número es muy inferior al de vacantes en el cristal.

Hay que hacer notar, que la producción de lagunas (o vacantes) y defectos de Schottky disminuye la densidad del cristal al aumentar el volumen y mantener la masa constante. La producción de defectos intersticiales, substitucionales y defectos de Frenkel no cambia en primera aproximación el volumen del cristal ni la densidad. Estos efectos, despreciables a presiones normales, adquieren gran importancia para las presiones del Manto Inferior.

La causa fundamental de la existencia de estos defectos son las fluctuaciones térmicas y debido a estas se producen y destruyen continuamente estos defectos, por lo que los valores obtenidos en (6-6), (6-7) y (6-8), son valores medios según la distribución de Gibbs (ver Física Estadística de Landau, Capítulo 3).

6.3.- MECANISMO DE ATENUACION POR CREACION DE DEFECTOS PUNTUALES

Como ya se vió en el Capítulo anterior, muchos datos experimentales sugieren una fricción interna que varía con la presión y temperatura (Smith, 1972)

$$Q^{-1} = A(p,T) \exp\left(-\frac{E^* + pV^*}{kT}\right) \quad (6-9)$$

Anderson y Archambeau (1964), parten de hipótesis de una tierra homogénea y una fricción interna.

$$Q^{-1}(p,T) = Q_0^{-1} \exp\left(\frac{E^*(T_0 - T)}{kT_0T}\right) \exp\left(\frac{pV^*}{kT}\right) \quad (6-10)$$

con E^* y V^* los apropiados al mecanismo causante de la anelasticidad. Suponen además que este mecanismo es único y que operamos lejos de una región de resonancia.

El mecanismo que se propone intenta obtener teóricamente una expresión del tipo (6-9).

Supongamos en una zona de la Corteza o del Manto alcanzada por una onda sísmica, un monocristal de volumen unidad. El trabajo realiza

do por las fuerzas elásticas sobre él, para una variación $\delta \epsilon_{ij}$ del ten sor de deformaciones es:

$$\delta W = \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij}$$

" La idea fundamental del mecanismo que se propone es que este trabajo da lugar a un aumento del número de defectos del monocristal y por ello a un incremento de la energía del mismo, a expensas de la atenuación de la energía elástica de la onda sísmica ".

En el caso considerado, el monocristal del interior de la Tierra, suponemos que se encuentra a una profundidad r , presión $p(r)$ y una temperatura $T(r)$. Estudiemos la distribución de vacantes en este cristal.

Como se sabe por termodinámica, vease el Cap. 1 del libro de Brophy et al. (1968), en este caso la función de Helmholtz o energía libre F , no es el potencial termodinámico más adecuado para describir el estado del sistema, pues sobre éste se realiza un trabajo por la onda de tensiones. En estas condiciones, si p y T son constantes para el volumen considerado, la función de Gibbs es la que en el equilibrio alcanza un valor mínimo y por ello el potencial termodinámico más ade cuado para describir el sistema.

Consideremos el problema de la distribución de defectos en el cristal en dos etapas:

- 1.- Antes de llegar la onda sísmica.
- 2.- Al llegar la onda.

1.- El cálculo del número de vacantes en el cristal antes de la llegada de la onda se hace de modo análogo a como se hizo en la Secc. (6-2), con G en lugar de F .

La variación de energía de Gibbs asociada al proceso es:

$$\Delta G = n E_v - T \Delta S + p \Delta V$$

$\Delta V = n \cdot V^*$ es el aumento de volumen asociado y V es el volumen de activación de un defecto, o variación del volumen debida a la formación de ese defecto.

$\Delta E = n \cdot E_v$, aumento de energía interna.

Empleando la aproximación de Stirling y mediante la condición de equilibrio:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n} \right) = 0 \quad ; \quad G = G_p + \Delta G$$

obtenemos:

$$n_r = K N \exp \left(- \frac{E_v + P V^*}{kT} \right) \quad (6-11)$$

del mismo modo obtendríamos n_i y n_s para defectos intersticiales y sustitucionales, aunque en estos el volumen de activación V es igual a cero en primera aproximación. La diferencia entre las expresiones (6-6) y (6-11) es que en aquella considerábamos el cristal sometido a una presión despreciable frente a las fuerzas de cohesión y ahora, en el caso real de las condiciones del interior de la Tierra, las presiones son suficientemente altas, como para que su contribución al factor exponencial sea importante.

2.- Una vez que sobre el elemento de volumen considerado llega la onda sísmica, sobre cada átomo del mismo se efectúa un trabajo medio por periodo. De modo clásico, a la energía de cohesión más la de vibración térmica se superpone la energía elástica de la onda sísmica (energía cinética + energía de deformación) (1). Debido a la magnitud de esta energía puede considerarse como una pequeña perturbación dependiente del tiempo de la energía de vibración térmica, $W_a(t) \ll kT \ll E_{coh}$. Siendo $W_a(t)$, la perturbación sobre un átomo en el instante t .

(1) El problema requeriría un tratamiento cuántico, considerando en el hamiltoniano un término perturbador periódico, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}_{pert}(t)$, debido a la energía elástica de la onda y entonces realizar el cálculo de la función de onda del sistema. Pero para un sólido el problema es irresoluble y de cualquier modo trabajamos con órdenes de magnitud, por lo que la aproximación empleada parece admisible.

Para poder establecer valores medios de la perturbación en un periodo suponemos que el tiempo de relajación para la formación de defecto es mucho menor que el periodo de la onda sísmica. Esto equivale a considerar el sistema en un equilibrio termodinámico incompleto, tal que en cada instante el número de defectos es el de equilibrio para la deformación $\epsilon(t)$.

Llamemos \bar{W}_a a la perturbación media de la energía de cada átomo en un periodo, igual al trabajo medio realizado sobre cada átomo. Si un átomo necesitaba, antes de la acción de la perturbación, transpasar una barrera de energía, en su proceso de difusión a un lugar contiguo libre, para formar finalmente una vacante en el interior del cristal (punto E en la figura 6-1), debido a la perturbación \bar{W}_a (representada en la figura 6-1 (b) y (c)) aumenta la probabilidad de salto de un átomo a un lugar vacante contiguo. En los estados intermedios representados por los máximos de la figura 6-1 (c) no es válida la teoría de la elasticidad y no se supone perturbación.

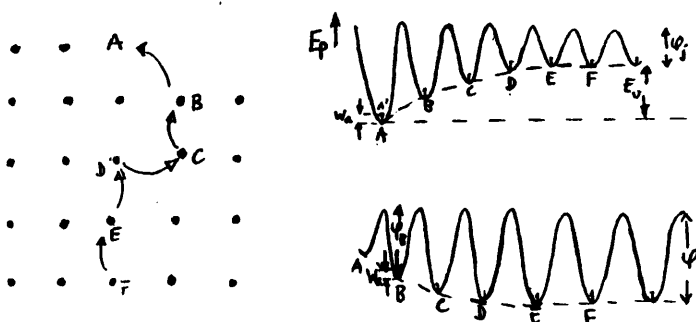


Figura 6-1. Sucesión de saltos que producen una vacante que migra hacia el interior del cristal (a). En (b), se representa la energía potencial de la vacante según se difunde en el cristal y en (c), la de los átomos localizados en las distintas posiciones de (a). Según Dekker (1957), Sec. 3.4.

Si un átomo, por ejemplo el B de la figura 6-1 (a), necesitaba antes de la perturbación una fluctuación de energía térmica φ_B , después de ésta, necesitará una fluctuación $\varphi_B - \bar{w}_a$ para transpasar la barrera de energía potencial y situarse en la posición A. Es decir, la probabilidad de que B pase a A, ha pasado de $p_B \propto e^{-\varphi_B/kT}$ a $p'_B = p_B e^{\bar{w}_a/kT}$. Ahora la probabilidad de formación de una vacante pasará de (6-11)

a: (1)

$$\frac{n'_v}{N} = K \exp \left(- \frac{\bar{E}_v + pV' - \bar{w}_a}{kT} \right) \quad (6-12)$$

A este resultado se puede llegar de un modo menos intuitivo, si consideramos la función de Gibbs en un cristal, con n' vacantes de energía de formación \bar{E}_v (que suponemos igual al valor en ausencia de la perturbación) y sobre el que actúa la perturbación por átomo \bar{w}_a . Entonces, en lugar de (6-3) se tendrá para la energía de Gibbs

$$G_R = G_p + n' \bar{E}_v - T(S_R - S_p) - kT \ln \left(\frac{N!}{(N-n')! n'!} \right) - n' \bar{w}_a$$

indicando el último término que los lugares vacantes no poseen la energía \bar{w}_a de perturbación que tendrían n' átomos en esas posiciones. En el equilibrio $\partial G_R / \partial n' = 0$ y se tendrá:

$$n' = K N \exp \left(- \frac{\bar{E}_v - \bar{w}_a + pV'}{kT} \right) \quad (6-12')$$

(1) Se puede llegar a este resultado mediante un enfoque estadístico del problema. El sistema puede estudiarse mediante una colectividad isoterma-isobárica de función de distribución $\rho(E) \propto \exp((G-H+pV)/kT)$ que representa la probabilidad de un estado del sistema con una vacante de energía \bar{E}_v .

Si se supone una perturbación \bar{w} , según la teoría de fluctuaciones termodinámicas de Peierls (ver Física Estadística de Landau, 1969), $G' = G + \bar{w}$ será la nueva energía de Gibbs en presencia de la perturbación con lo que la densidad de probabilidad pasará de $\rho = e^{\frac{G-H+pV}{kT}}$ a $\rho' = \rho e^{\bar{w}/kT}$.

A causa de esta perturbación o trabajo medio por átomo la distribución de vacantes queda alterada y después de un periodo habrá un número $n'_v > n_v$, dado por (6-12).

Ahora ya estamos en disposición de conocer la pérdida de energía elástica de la onda en este proceso. Según puede verse en la sección 20 del libro de Física Estadística de Landau (1969), el trabajo realizado por la fuente exterior (onda sísmica) es igual a la variación de energía de Gibbs.

$$\Delta W = \Delta G = - \Delta E_{elast.} \quad (6-13)$$

Antes de efectuar el trabajo elástico la onda sísmica, la energía de Gibbs asociada al número de vacantes n_v en el equilibrio era:

$$G_1 = n_v E_v - T \Delta S + p \Delta V$$

Después de efectuar trabajo durante un periodo

$$G_2 = n'_v E_v - T \Delta S' + p \Delta V$$

Por lo que:

$$\Delta G = G_2 - G_1 = n'_v E_v - n_v E_v - T(\Delta S' - \Delta S) + p(\Delta V' - \Delta V) \quad (6-14)$$

Simplifiquemos esta expresión:

Según (6-11) y (6-12):

$$n'_v = n_v \exp \left(\bar{W}_a / kT \right) \quad (6-15)$$

Siendo n_v y n'_v el número de vacantes antes y después de la llegada de la onda sísmica al volumen de cristal considerado.

El trabajo elástico efectuado por átomo será mucho menor a la energía térmica de vibración. Para hacerse idea de esto, no hay más que considerar que los desplazamientos debidos a vibraciones térmicas son del orden del 10% del espaciado reticular (Wert y Thomson, 1969, Cap. 3), mientras que el límite elástico de la mayor parte de los sólidos rara vez supera el 0,2% (Moffat et al., 1968); luego $W_a \ll kT$ y entonces:

$$n'_v \approx n_v \left(1 + \frac{\bar{W}_a}{kT} \right) \quad (6-16)$$

a) El término $T(\Delta S' - \Delta S)$ es:

$$\begin{aligned} T(\Delta S' - \Delta S) &= kT \left[\ln \frac{N!}{(N-n'_v)! n'_v!} - \ln \frac{N!}{(N-n_v)! n_v!} \right] = \\ &= kT \ln \frac{(N-n_v)! n_v!}{(N-n'_v)! n'_v!} \end{aligned}$$

empleando la aproximación de Stirling (n y $n' \ll N$)

$$\approx kT N \ln \frac{N-n}{N-n'} = kT \ln \left(\frac{1-n/N}{1-n'/N} \right) \approx kT (n' - n) \quad (6-17)$$

b) El último término de (6-13)

$$\Delta V' = n' V^* \quad ; \quad \Delta V = n_v V^* \quad (6-18)$$

Substituyendo (6-16), (6-17) y (6-18) en (6-14) resulta:

$$\Delta G = \Delta n (E_v + pV^* - kT) = Kn_v \bar{W}_a \left(\frac{E_v + pV^*}{kT} - 1 \right) \quad (6-19)$$

Esta es la pérdida de energía elástica por la onda por periodo y unidad de volumen.

El coeficiente de atenuación o absorción según la Secc. 35 del libro de Landau y Lifshitz es:

$$\gamma = \frac{1}{2c} \frac{\bar{E}}{\bar{E}} = \frac{\Delta \bar{E}}{2cT\bar{E}}$$

Siendo \bar{E} la energía media de la onda; y la fricción interna que es el factor que nos interesa será:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta \bar{E}}{2nE_n} = \frac{n_v \bar{W}_a}{2nE_n} \left[\frac{E_v + pV^*}{kT} - 1 \right]$$

y teniendo en cuenta (6-11)

$$Q_v^{-1} = \frac{N \bar{W}_a}{2nE_n} \left[\frac{E_v + pV^*}{kT} - 1 \right] \exp \left[- \frac{E_v + pV^*}{kT} \right] \quad (6-20)$$

de la forma general (6-9), que es lo que se perseguía.

En todo lo interior se ha considerado únicamente la formación de vacantes, el cálculo con defectos intersticiales y sustitucionales es enteramente análogo y las expresiones que se obtienen son:

$$Q_{il(s)}^{-1} = \frac{N \bar{W}_A}{2nE_A} \left[\frac{E_{i(s)} + pV_{i(s)}^*}{kT} - 1 \right] \exp \left[- \frac{E_{i(s)} + pV_{i(s)}^*}{kT} \right] \quad - 125 - \quad (6-21)$$

No obstante, al ser E_i y $E_s \sim 3$ a 5 veces E_v , el número de vacantes es muy superior al de estos defectos, que por tener mayores energías de formación son mucho menos probables; aunque el hecho de no verse afectados por la presión tanto como las vacantes, $V_{(i)}^*$ o $V_{(s)}^*$, les puede convertir en importantes cuando tratamos con las grandes presiones del Manto Inferior.

En el caso más general de un cristal poliatómico, habría que considerar la contribución de todos los átomos que intervienen en este mecanismo, a las expresiones (6-20) y (6-21)

$$Q^{-1} = \sum_{j=1}^N Q_{vj}^{-1} + \sum_k Q_{(i)k}^{-1} + \sum_l Q_{(s)l}^{-1} \quad (6-22)$$

donde (v), (i), (k), representan vacantes, impurezas intersticiales y sustitucionales y los sumatorios son sobre los distintos tipos de átomos que forman estos defectos.

Para el caso de sólidos iónicos y como pudo verse en (6-7), las expresiones que resultan son idénticas substituyendo para el caso de las vacantes E_v por la mitad de la energía de formación del par de vacantes $\phi = E_v^+ + E_v^-$.

En todo lo expuesto hasta ahora, hemos estado tratando con cristales perfectos. El caso real de los materiales de la Tierra es de estructura policristalina, por lo que habría de tener en cuenta de modo primordial el efecto que en el mecanismo propuesto pueden tener las fronteras de grano. Como no conocemos exactamente estos efectos, en el Capítulo siguiente, cuando busquemos un valor numérico concreto a la fricción interna de las ondas internas, incluiremos en una constante ~ 10 (Knoppoff y McDonald, 1960) los efectos de la estructura policristalina en las fórmulas anteriores, - la justificación de este hecho puede hallarse en que la interacción entre vacante y dislocaciones de borde, en las que se pueden analizar muchas subfronteras de grano, es de varias décimas de eV (Friedel, 1960; Girifalco y Welch, 1967) -.

6.4.- POSIBLES INTERACCIONES DE ESTE MECANISMO CON OTROS BASADOS EN DISLOCACIONES

En esta sección, vamos a esbozar las posibles interacciones de nuestro mecanismo con otros estudiados anteriormente.

En el Capítulo 5, hicimos un breve repaso a los mecanismos basados en dislocaciones. Aunque concluíamos que ninguno de ellos parecía el fundamental en la explicación de la anelasticidad de la Tierra, todos ellos estaban basados en el hecho de que estas dislocaciones es taban ancladas a las impurezas del sólido.

Es bastante razonable suponer que si el número de defectos aumenta con el paso de una onda de tensiones según (6-15), el número de dislocaciones ancladas aumentará. Este aumento producirá un incremento en las pérdidas de energía por el mecanismo de resonancia, sección 5.5. Respecto de los mecanismos de histéresis y relajación, no se ve tan claro el efecto del aumento del número de defectos.

En general, podemos suponer que la energía perdida por unidad de volumen, debida a mecanismos de dislocaciones es:

$$\Delta E = \sum_l \psi_l(n) \rho_l(\bar{r}, n) (W_{per})_l \quad (6-23)$$

siendo $\psi(n)$ la probabilidad de que una dislocación esté anclada, que es función creciente del número de impurezas.

(W_{per}) es la energía perdida por dislocación anclada al serle aplicada una tensión transversal τ'_{ij} .

$\rho_j(\bar{r}, n)$ es la densidad de dislocaciones de longitud l .

El problema de su cálculo es muy complejo; el caso más simple de dislocaciones rectilíneas y paralelas con el mismo plano de deslizamiento puede verse en la sección 30 de Teoría de la Elasticidad de Landau. Resulta un problema en el campo complejo y una densidad que crece en la proximidad de las impurezas.

El aumento del número de defectos puntuales, incide en (6-23).
Para calcularlo, podríamos desarrollar dicha expresión por Taylor y
si se conociesen sus términos podríamos calcular el aumento de las
pérdidas de energía debidas a mecanismos de dislocaciones: $\Delta E(n') - \Delta E(n)$.

C A P I T U L O 7

VARIACION DE LA FRICCION INTERNA DEBIDA AL MECANISMO PROPUESTO, EN EL INTERIOR DEL MANTO

7.1.- FRICCION INTERNA EN UN MANTO HOMOGENEO

En este capítulo, se va a obtener, a partir del mecanismo propuesto en el capítulo 6, una distribución de Q_α con la profundidad en un Manto supuesto homogéneo. Las consideraciones que resulten de los valores obtenidos y su comparación con modelos experimentales serán de tipo cualitativo.

Para aplicar las fórmulas (6-15) y (6-16), debemos calcular la perturbación media por periodo y por átomo \bar{W}_a , a partir del valor del trabajo medio realizado por la onda de tensiones por unidad de volumen y periodo \bar{W} .

Una hipótesis razonable y que está dentro de las aproximaciones empleadas hasta ahora, es considerar que para las largas longitudes de onda que estamos tratando ~ 100 Km. (ondas P), la onda "no ve" la estructura de la red que para ella se comporta como un medio continuo. En la unidad de volumen que se estudia, la onda afecta en primera aproximación por igual a todos los átomos, que oscilan prácticamente en fase (se está suponiendo un sólido homogéneo). Entonces, si \bar{W} es el trabajo medio por periodo efectuado por la onda sísmica y N es el número de átomos en dicho volumen, la perturbación que actúa sobre cada átomo será:

$$\bar{W}_a = \frac{\bar{W}}{N} \quad (7-1)$$

El razonamiento que conduce a esta fórmula supone el cálculo del valor medio \bar{W} , que es un promedio temporal. La justificación de esto es que si aplicamos la teoría de perturbaciones termodinámicas de Peierls

(ver sección 32 de la Física Estadística de Landau y Lifshitz, 1969), si sobre el hamiltoniano original $H_0(p,q)$ actúa una perturbación $W(p,q)$, siendo p,q las coordenadas generalizadas del sistema estudiado, la energía libre resulta en primera aproximación

$$F = F_0 + \langle W \rangle \quad (7-2)$$

es decir, la corrección de primer orden a la energía libre F es igual simplemente al valor medio de la energía de perturbación para todos los estados microscópicos, considerando sus probabilidades:

$$\langle W \rangle = \int W(\vec{p}, \vec{q}) \rho(\vec{p}, \vec{q}) d\vec{q} d\vec{p}$$

Ahora bien, el promedio estadístico es equivalente al temporal si consideramos un tiempo suficientemente grande respecto a los de establecimiento del equilibrio, al efectuar el promedio en el tiempo (se han considerado procesos cuyo tiempo de relajación τ es mucho menor que el periodo de la perturbación).

Una vez se tiene $F = F_0 + \bar{W}$, ya solo se debe tener en cuenta la homogeneidad del cuerpo para llegar a (7-1).

Sustituyendo este valor \bar{W}_A dado por (7-1), en (6-15) ó (6-16) resulta para un solo tipo de defecto contribuyendo a la fricción interna, con energías y volúmenes de activación E^* y V^* y $E_M = 2E^*$ para ω const.:

$$Q^{-1} = \frac{C}{4\pi} \left[\frac{E^* + pV^*}{kT} - 1 \right] \exp \left(- \frac{E^* + pV^*}{kT} \right) \quad (7-3)$$

La constante C tiene en cuenta el factor $(\nu/\nu')^{1/2}$ de cambio de entropía térmica y el hecho de tratar con policristales (en realidad estudiamos un monocristal equivalente y para ello debemos introducir una constante correctora a la hora de calcular la fricción interna).

Si en primera aproximación, seguimos considerando válida (7-1) para un sólido con distintos átomos (o iones) j , contribuyendo a la fricción interna por creación de un solo tipo de defectos puntuales de energías E_j y volúmenes V_j la fórmula (7-3) se convierte en:

$$Q^{-1} = \sum_j C_j^j \frac{X_j}{4\eta} \left[\frac{E_j^* + pV_j^*}{kT} - 1 \right] \exp \left[- \frac{(E_j^* + pV_j^*)}{kT} \right] \quad (7-4)$$

Siendo X_j la fracción molar de la especie atómica $j = \frac{N_j}{N}$ y C_j , como antes, la constante policristalina y de entropía térmica y la sumatoria es sobre los distintos átomos que contribuyen a la fricción interna.

Como la expresión (7-4) es válida para vacantes e intersticiales la podemos generalizar como:

$$Q^{-1} = \sum_{j,d} C_{j,d} \frac{X_j}{4\eta} \left[\frac{E_{j,d}^* + pV_{j,d}^*}{kT} - 1 \right] \exp \left[- \frac{(E_{j,d}^* + pV_{j,d}^*)}{kT} \right] \quad (7-5)$$

indicando el índice d , el tipo de defecto: vacante e intersticial.

La fórmula (7-5) puede hacerse más compleja teniendo en cuenta que un mismo defecto, puede tener distintas energías de formación en distintas regiones del cuerpo, que puede interaccionar con otros defectos etc.

En (7-3), (7-4) y (7-5) se ha obtenido una fricción interna independiente de la frecuencia (cuarta condición de la sección 2.2). Por otra parte, el razonamiento anterior es independiente de si la onda es longitudinal o transversal, por lo que este mecanismo dará lugar a funciones de disipación iguales para ambos tipos de ondas:

$$Q_{\alpha}^{-1} \cong Q_{\beta}^{-1} \quad (7-6)$$

con lo que cumple también en primera aproximación la cuarta condición de la sección 2.2. Recordemos que Kanamori, (1967), obtenía $Q_{\alpha}^{-1} \cong Q_{\beta}^{-1}$ y Anderson et al (1965) y Anderson y Hart (1978) proponen $Q_{\beta}^{-1} = 2,25 Q_{\alpha}^{-1}$, es decir la no existencia de procesos disipativos en compresión pura, aunque señalan que sus datos son consistentes con un factor entre 1,4 y 1,8 en lugar de 2,25.

El mecanismo propuesto, tal como se indicó en la sección 6.4, es indudable que influenciaría a otros, en particular a los basados en dislocaciones que producen pérdidas mucho mayores para ondas transversa

les que longitudinales, por ello es presumible que la relación entre Q_p^{-1}/Q_a^{-1} , según este mecanismo sea mayor que 1:

Respecto a la hipótesis de Manto homogéneo cabe señalar que Anderson y Arohambeau (1969), calcularon la variación de Q^{-1} , si esta fuese debida exclusivamente a la presión y temperatura, en una Tierra homogénea. Suponían que la disipación obedece a una expresión del tipo:

$$Q^{-1}(T, p) = Q_0^{-1} \exp E^*/kT \cdot \exp p\Delta V^*/kT \quad (7-7)$$

E^* y ΔV^* son la energía y volumen de activación apropiado para el mecanismo. La dificultad de este modelo reside en que para ajustarle a una distribución con posibilidades de realidad, los parámetros E y V deben adquirir unos valores tan pequeños ($E^* \sim 1$ kcal/mol, $\Delta V^* \sim 10^{-3}$ mol) que no corresponden a ningún fenómeno real de Física de Estado Sólido, que haya sido estudiado hasta el momento.

7.2.- DISTRIBUCION DE Q^{-1} , CON EL MECANISMO PROPUESTO.

Es evidente que para el mecanismo desarrollado en el capítulo anterior tenga alguna posibilidad de existencia real, además de dar cuenta de las propiedades 2ª y 4ª de la Secc.(2-2), debe explicar los rasgos generales de la distribución de Q^{-1} en el interior de la Tierra obtenidos experimentalmente, en particular y de modo fundamental el que Q^{-1} en el Manto Superior sea un orden de magnitud mayor y si es posible, la zona de alta atenuación entre los 100 y 500 km., correspondiente en parte a la región de baja velocidad de Gutenberg.

Con objeto de obtener valores numéricos y compararlos con los datos experimentales y otros modelos, hemos considerado el modelo más simple de Tierra homogénea y en la expresión (7-5) solo dos tipos de defectos contribuyendo a la fricción interna: Vacantes y defectos intersticiales. Entonces, la fórmula (7-5) se transforma en:

$$Q_s^{-1} = \frac{C}{4\eta} \left[\left(\frac{E_v + pV^*}{kT} - 1 \right) \exp \left(-\frac{E_v + pV^*}{kT} \right) + \left(\frac{E_i}{kT} - 1 \right) \exp \left(-\frac{E_i}{kT} \right) \right] \quad (7-8)$$

donde hemos tomado igual a cero el volumen de activación para defectos intersticiales y como consideramos la hipótesis de una Tierra homogénea, solo se ha tenido en cuenta un tipo de átomo contribuyendo a la fricción interna, aunque también podríamos considerar la expresión (7-8) como un promedio, en cuyo caso E_v , E_i , V^* serían valores medios. (1)

En el cálculo de (7-6) se ha empleado la Tabla (7-1), de variación de la presión con la profundidad del modelo de Bullen-Haddon I.

TABLA 7-1

Profund. (km)	Presión (10^{12} dina/cm ²)	Profund. (km)	Presión (10^{12} dina/cm ²)	Profund. (km)	Presión (10^{12} dina/cm ²)
0	0,000	1400	0,572	4400	2,802
15	0,004	1600	0,668	4600	2,951
60	0,019	1800	0,766	4800	3,087
100	0,032	2000	0,867	4982	3,198
200	0,065	2200	0,970	5000	3,208
300	0,099	2400	1,076	5121	3,275
350	0,116	2600	1,187	5200	3,315
400	0,135	2800	1,301	5400	3,405
413	0,140	2878	1,347	5600	3,480
500	0,174	3000	1,476	5800	3,537
600	0,213	3200	1,686	6000	3,579
650	0,234	3400	1,892	6200	3,602
800	0,298	3600	2,092	6371	3,608
984	0,380	3800	2,284		
1000	0,387	4000	2,467		
1200	0,478	4200	2,640		

- (1) Como es evidente, los volúmenes y energías de activación variarán de unas profundidades a otras, aparte de variaciones laterales para una misma profundidad. En este sentido, las energías y volúmenes de activación que desde ahora se consideren, tienen el significado de valores equivalentes al de todos los existentes en la zona estudiada y considerada homogénea; en el sentido de que en dicha zona, el número de procesos de creación con esos valores E^* y V^* sea igual al número de los existentes si consideramos cada átomo con sus volúmenes y energías reales de activación.

También se han utilizado las curvas de variación de la temperatura con la profundidad (figura 7-1), que aparecen en el libro de Stacey (1969). Antes de considerar el modelo convectivo, según indica el autor, conviene emplear los datos del modelo no convectivo que ofrece una mayor fiabilidad.

Estos modelos, de cualquier modo tienen mucho de especulativo y por lo tanto, márgenes de error muy considerables.

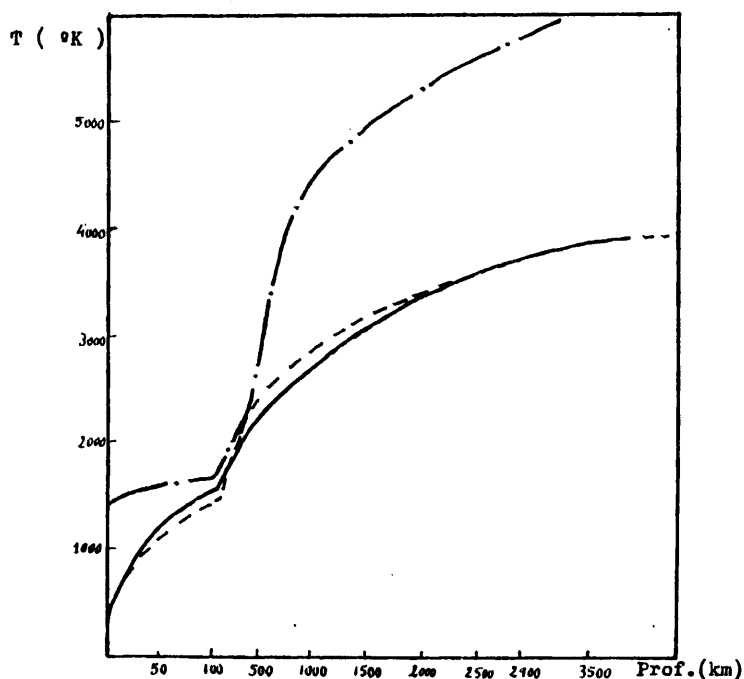


Figura 7-1. Temperaturas en el interior del Manto, modelo convectivo (C) y modelo no convectivo (N.C.), junto con el punto de fusión del Manto (P.F), según Stacey.

En (7-6) se supone además $C = 10$, lo que unido a la simplificación de suponer una Tierra homogénea, hace que la discusión que sigue sea de tipo cualitativo ya que no podemos de ningún modo considerar los resultados numéricos de (7-6), salvo como estimaciones de órdenes de magnitud de Q^{-1} a las distintas profundidades del Manto.

7.2.1. Variación de Q^{-1} con la energía de formación de vacantes y de defectos intersticiales.

a) E_v variable y E_i constante.

Se ha dibujado en la figura 6, los valores obtenidos para $Q^{-1}(r)$ de (7-6) para distintos valores de E_v . Se tomaron $E_v = 0,7$ eV, 0,8 eV, 0,9 eV, 1 eV, 1,3 eV y $E_i = 3$ eV que son valores entre los que suelen hallarse las energías de formación de vacantes e intersticiales. Para el volumen de activación para la creación de aquellas, se tomó un valor tentativo $V^* = 5\text{\AA}^3$, lo que supone $V^* = 0,5 V_M$ suponiendo un volumen atómico característico de este Manto homogéneo de $V_A = 10\text{\AA}^3$.

En la figura (7-2), se pueden ver los valores de $Q^{-1}(r)$ a los que se ha superpuesto en forma rayada los valores medios de Q^{-1} hallados en el capítulo 4 por el MPD 3 para el Manto Superior e Inferior.

En los 100 primeros km. nuestro modelo da valores excesivamente bajos ($\sim 10^{-6}$ a 10^{-3}) por lo que no parece que pueda ser importante en esa zona.

Cualquiera de las curvas obtenidas en la figura 1, explica el resultado experimental de una atenuación en el Manto Superior un orden de magnitud mayor que en el Manto Inferior y también la existencia de una zona de máxima atenuación entre los 200 y 500 km.

b) E_i variable, E_v constante.

En la figura (7-3) se han dibujado los valores de $Q^{-1}(r)$, para

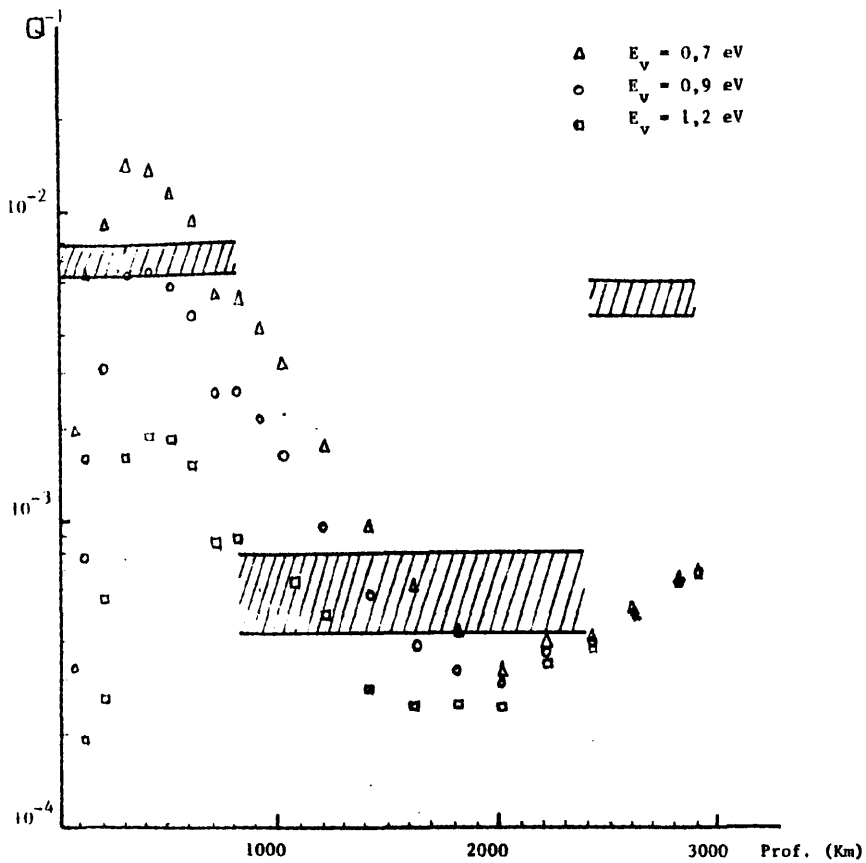


Figura 7-2. Variación de Q^{-1} con E_v para $E_i = 3 \text{ eV}$ y $V = 5 \text{ Å}^3$; se ha superpuesto, como en el resto de las figuras, los valores medios \pm las desviaciones típicas del modelo MPD3 (zona rayada).

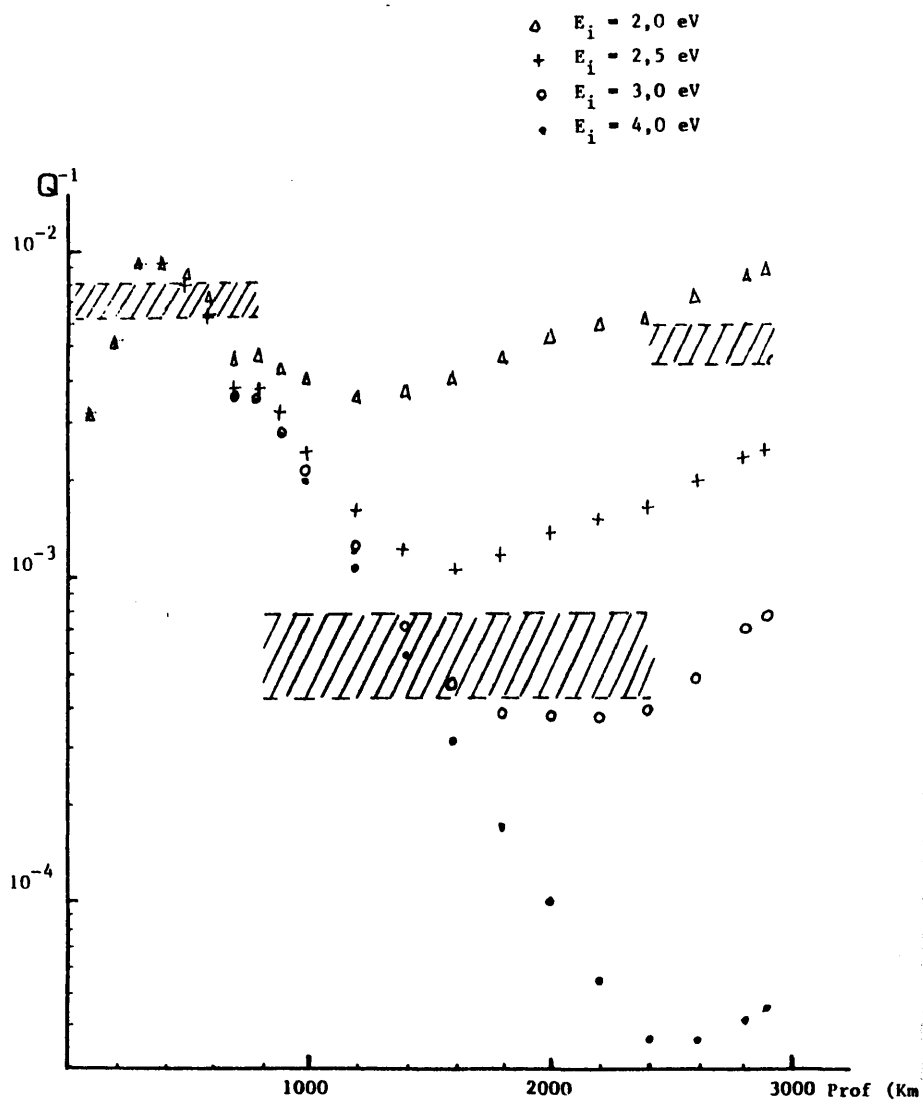


Figura 7-3. Variación de Q^{-1} con E_i , para $E_v = 0,8$ eV y $V^* = 5 \text{ \AA}^3$.

$E_v = 0,8 \text{ eV}$, $V^* = 5\text{\AA}^3$ y distintos valores de E_1 . Se toman algunos de los más comunes para defectos intersticiales y sustitucionales : 2 eV - 4 eV. Como puede verse, y debido a la hipótesis de considerar en primera aproximación el volumen de activación para la creación de un defecto intersticial igual a cero, el efecto E_1 se hace notar principalmente en el Manto Inferior, debido a que en su formación influyen muy poco las fuertes presiones allí existentes que hacen muy improbable la creación de vacantes.

Podemos deducir de la figura, que una $E_1 = 4 \text{ eV}$ es demasiado grande pues conduciría a atenuaciones 10^{-5} excesivamente pequeñas comparadas con las experimentales ($\sim 10^{-3}$ ó 10^{-4}) y que $E_1 = 2 \text{ eV}$ daría lugar a Q^{-1} excesivamente altos respecto a los del Manto Superior, en el Manto Inferior.

Algunos valores de estas energías y volúmenes de activación pueden verse en los libros ya citados de Física del Estado Sólido. Sin embargo existen muy pocos datos sobre energías de activación de procesos de creación y difusión en óxidos y silicatos. Algunos datos de interés pueden verse en el artículo de Jackson y Anderson (1970) y en el American Institute of Physics Handbook (1972) Cap. 9.

7.2.2. Variación de Q^{-1} con el volumen de activación, V_1^*

En todas las curvas estudiadas hasta ahora, se ha operado con un volumen de activación $V_1^* = 5\text{\AA}^3$, que suponía la mitad del volumen atómico $V_A = a^3$ siendo $a = 2,5 \text{\AA}$, de esa especie atómica imaginaria de un Manto homogéneo. Anderson (1967), da los volúmenes de activación para un fenómeno de difusión e indica que se encuentran comprendidos entre $0,4 V_M$ y $0,9 V_M$.

En la figura (7-4), se representa la variación de la fricción interna debida a nuestro mecanismo con el valor del volumen de activación.

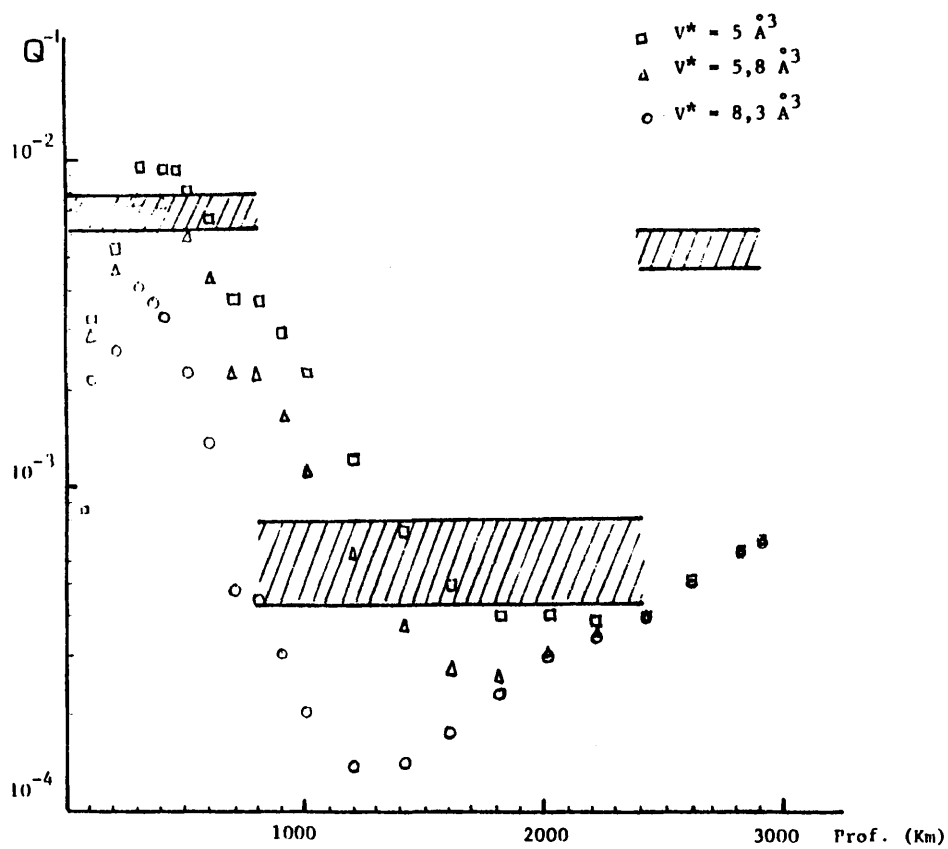


Figura 7-4. Variación de Q^{-1} con el volumen de activación V^* para $E_v = 0,8 \text{ eV}$ y $E_i = 3 \text{ eV}$.

Se puede comprobar que para los valores empleados, entre 5 \AA y $8,3 \text{ \AA}$, la variación en la distribución de Q^{-1} con la profundidad es muy apreciable. El aumento de V^+ no solo reduce la magnitud del máximo de fricción interna, sino que el cambio de ésta, al pasar del Manto Superior al Inferior, se hace menos suave, de modo más brusco a medida que aumentamos V^+ .

7.2.3. Variación de $Q^{-1}(r)$, con la temperatura

Todas las gráficas obtenidas hasta ahora, están basadas en la distribución no convectiva de temperaturas de Stacey de la figura (7-1). Los datos que se poseen sobre dicha distribución no son muy fiables y a veces difieren apreciablemente entre ellas. En la figura (7-5), se ha reflejado el efecto de dos de éstas distribuciones de temperatura en nuestro modelo. Distribuciones convectiva y no convectiva difieren como máximo en un 10% alrededor de los 500 km. de profundidad. Este incremento se manifiesta en una diferencia del orden del 50% en las distribuciones de Q^{-1} . (1)

Si no tenemos en cuenta resultados cualitativos que como ya se ha dicho en otras ocasiones, no tienen mucho valor por las grandes simplificaciones introducidas, desde un punto de vista cualitativo la curva $Q^{-1}(r)$ se ve poco afectada en su forma por un cambio como el efectuado en la distribución de temperaturas.

(1) Si consideramos en (7-5) $Q^{-1} \propto e^{-E/kT}$, estando los valores de T afectados de una desviación típica $\sigma(T)$, es trivial obtener $\frac{\sigma_{Q^{-1}}}{Q^{-1}} = \frac{E}{kT} \frac{\sigma_T}{T}$. No obstante la aplicación numérica de esta relación tiene poca utilidad cuando la fórmula de que se parte, que nos da Q^{-1} , sólo pretende dar una explicación cualitativa al fenómeno estudiado.

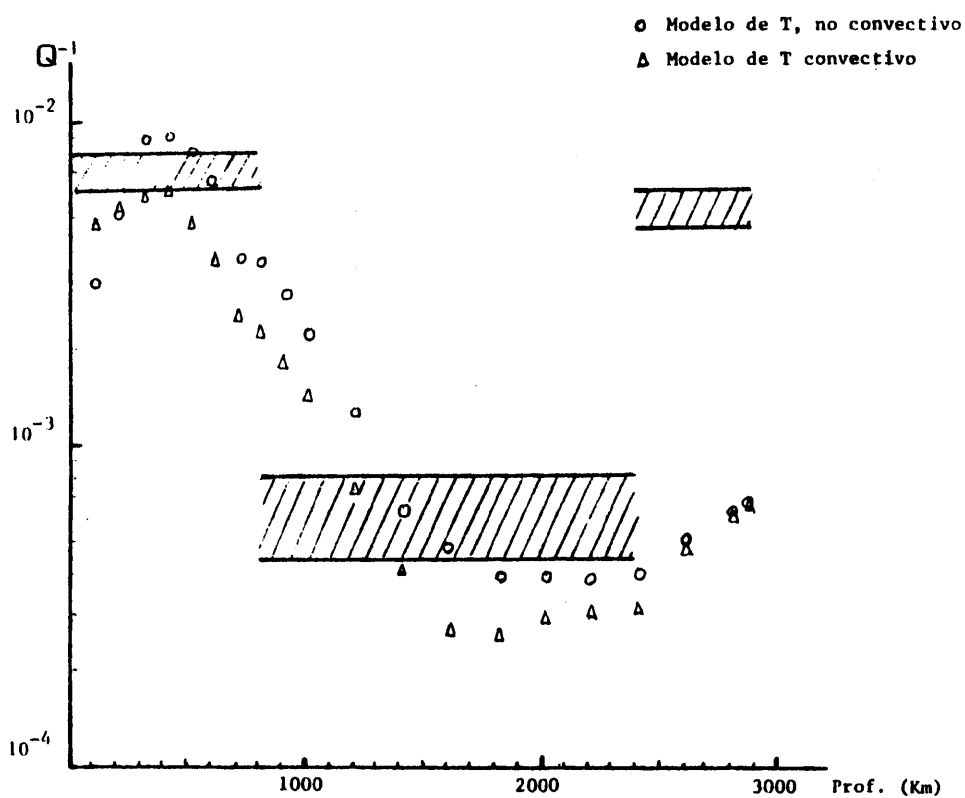


Figura 7-5. Variación de Q^{-1} , al cambiar la distribución de temperaturas.

7.3.- ACUERDO DEL MODELO TEORICO CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En la sección 7 del Capítulo 4, se hizo una comparación de los modelos de disipación MPD'S calculados en esta memoria y los de otros autores. Ahora, y considerando que el acuerdo entre ellos era aceptable, al comparar el modelo teórico (resultante del mecanismo propuesto) con uno experimental, lo haremos con el MPD8.

Conviene resaltar que el mecanismo técnico apuntado no tiene por que ser único, ni siquiera el más comportante en el Manto, sin embargo al realizar la comparación lo haremos como si fuese único. Por otra parte, debido a las aproximaciones empleadas para la obtención de (7-6) y al conocimiento muy imperfecto sobre temperaturas, composiciones, tamaños de grano, fases etc., no podemos aspirar más que a establecer ciertas consideraciones cualitativas como las realizadas en la sección (7-2). El intentar efectuar una comparación cualitativa e incluso semicualitativa entra de lleno en el terreno de lo especulativo. Con todo, resulta instructivo y puede ser útil apreciar ciertas características de dicha comparación semicuantitativa entre MPD8 y el modelo teórico $Q_{\alpha}^{-1}(r)$ y que se deducen de la figura (4-10) y de las figuras (7-2) a (7-5).

1. Salvó en los 60 primeros km., en los que el modelo teórico da una fricción interna excesivamente baja (entre 10^{-6} y 10^{-3}), el acuerdo cualitativo es bastante aceptable para E^* y V^* equivalentes únicas para todo el Manto.
2. Los máximos de atenuación en el modelo teórico, aparecen entre los 200 y 400 km. de profundidad estando su localización influenciada por E^* y V^* . Esta profundidad está entre la de los modelos de Teng, Mikumo y MPD8.
3. El mínimo de atenuación del modelo teórico se halla entre los 800 y 1800 km. dependiendo fundamentalmente de V^* ; en el modelo MPD8 es-

taba entre 1000 y 2000 km.

4. En el modelo teórico aparece un crecimiento gradual de la disipación en los últimos 800 - 500 km. del Manto.

Estas son las coincidencias; las diferencias más notables entre el modelo teórico basado en unos únicos volúmenes y energías y el MPD8 son:

1. Ningún modelo con E^* y V^* únicos, puede dar cuenta de la disminución brusca de Q^{-1} alrededor de los 800 km., la transición la efectúa más lentamente.
2. No se consiguen entre el máximo y el mínimo de Q_K^{-1} una diferencia tan grande como la de MPD8.
3. El aumento de la atenuación según el modelo teórico, en los últimos 500 km. del Manto es mucho más lento que el indicado en MPD8 aunque, como se dijo ya, los valores de éste para los últimos 200 km. podían estar enmascarados por efectos de difracción.

Es indudable por todo esto que para conseguir un mejor ajuste del modelo teórico respecto al MPD8 deberíamos considerar una situación un poco más compleja y realista, dividiendo el Manto en cuatro zonas: Manto Superior (30-400 km), zona de transición (400-800 ó 900 km.), Manto Inferior 1 (900-2000), Manto Inferior 2 (2000-2885), cada una supuesta homogénea con unas únicas energías y volúmenes de activación.

De un sencillo análisis de las figuras (7-2) a (7-5) se deduce que para conseguir un mejor ajuste bastará con realizar pequeños cambios en las energías y volúmenes de activación en ciertas zonas.

La figura (7-6), es una composición realizada a partir de las anteriores y que ajustaría de modo adecuado al modelo MPD8. En las distintas curvas existe, una triplete de números entre paréntesis que indican los: E_v , E_1 y V^* de la fórmula (7-6). Como datos más destaca-

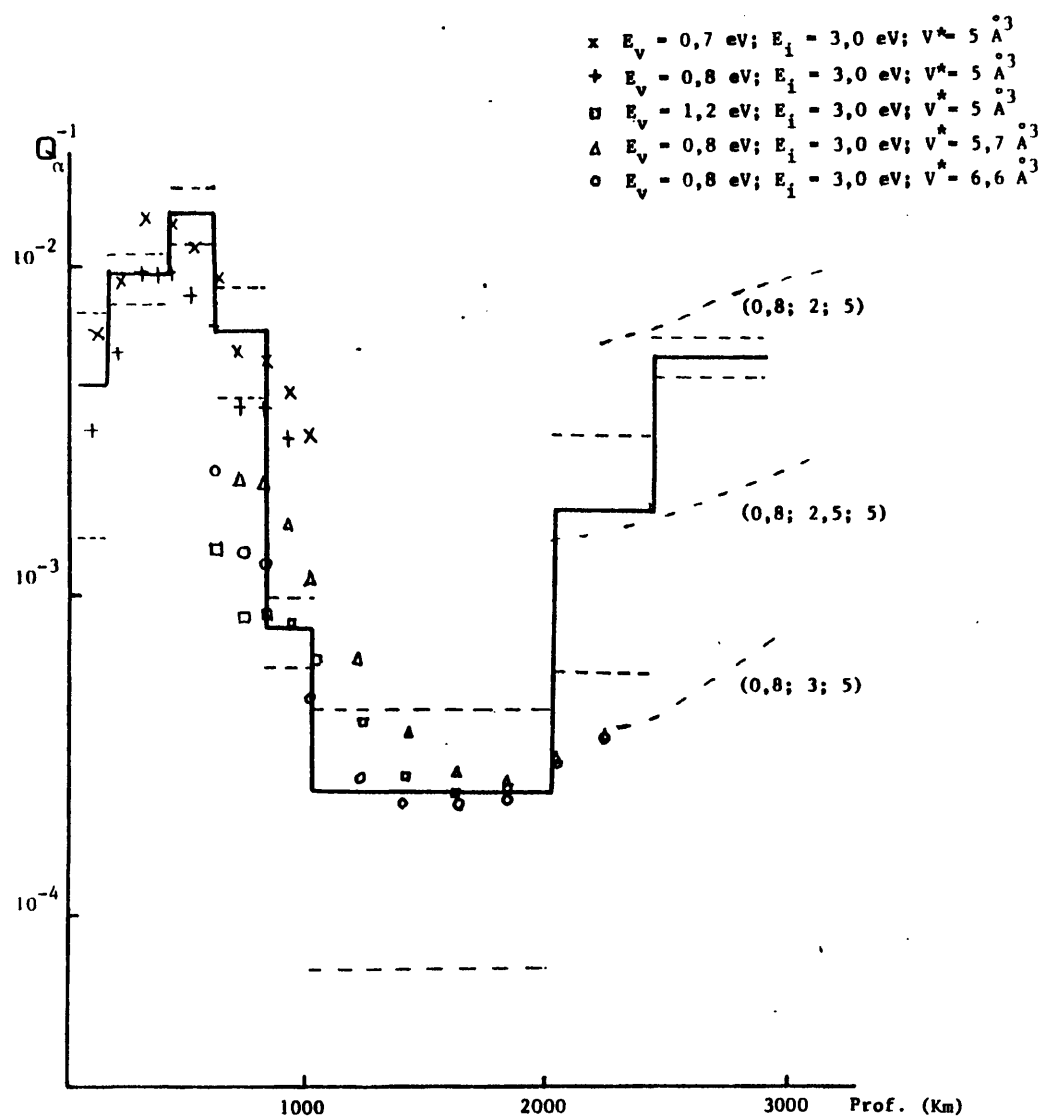


Figura 7-6. Comparación del modelo MPD8, en raya continua, con los que resultan del mecanismo teórico propuesto. Entre paréntesis figuran E_v ; E_i ; V^* .

bles merecen señalarse que:

1. Para explicar la disminución brusca de Q_a^{-1} alrededor de los 800 km. de profundidad, es preciso suponer cambios apreciables en los valores de las energías y volúmenes de activación. Así, se puede conseguir un buen ajuste con un aumento de la energía $E_v \sim 40\%$ y sin suponer cambio en el volumen de activación o suponiendo $\Delta E_v = 0$ y $\Delta V^* \sim 30\%$. No obstante y dado que ambos E^* y V^* están relacionados con la energía de cohesión del sólido, es más lógico suponer que lo que se produce, es un cambio en ambos simultáneamente ΔE^* y $\Delta V^* \sim 15 - 20\%$.

Esto supondría un cambio de fase hacia estructuras más densas y con mayores energías de ligadura lo que podría estar de acuerdo con la transición propuesta por Ringwood y Green (1969) del olivino (ortorrómbico) a la espinela (f.c.o) hacia los 600-800 km. con una $\Delta \rho \sim 12\%$.

2. La explicación del aumento de Q^{-1} en MPD8 a partir de los 2000 km. implicaría según el modelo teórico, una disminución gradual de la energía de formación de intersticiales (o energías de difusión en procesos para los que $V^* \approx 0$). Esto nos llevaría a suponer que en la frontera Manto-Núcleo se tendrían fases menos ligadas con menores energías de cohesión.

Estas consideraciones tienen un carácter marcadamente especulativo pero pueden considerarse interesantes ya que una mayor profundización en mecanismos de este tipo, podría arrojar luz sobre parámetros como energías y volúmenes de activación de materiales, así como temperaturas, del interior de la Tierra.

C A P I T U L O 8

INCLUSION DE PROCESOS DISIPATIVOS EN LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

8.1.- INTRODUCCION

Para finalizar éste trabajo, parece conveniente establecer un puente de unión entre las dos partes de que consta. Por un lado, se ha considerado la Tierra como medio disipativo, en el que la pérdida de energía sísmica se puede tener en cuenta en las ecuaciones del movimiento, mediante unos módulos elásticos complejos relacionados con los factores de calidad Q_s y Q_p (capítulo 1). Esto daba lugar, como solución de la ecuación del movimiento, a una onda que se atenúa en el espacio (vector de ondas complejo) y en el tiempo (frecuencia compleja). Por otro lado, se estudiaron aquellos procesos atómicos que pueden producir la disipación de energía. Falta, por lo tanto, una relación entre el tratamiento formal de unos módulos de elasticidad complejos y la realidad física de unos procesos disipativos.

En este capítulo, se van a introducir los procesos disipativos en las ecuaciones del movimiento de un medio supuesto en equilibrio incompleto. Mediante el empleo de la teoría de fluctuaciones termodinámicas y el concepto de función disipativa, se llega a la aparición de unas tensiones disipativas o viscosas debidas a dichos procesos. Estas tensiones introducen la dependencia temporal entre tensiones y deformaciones propia del fenómeno anelástico. Si se añaden a las tensiones elásticas se tiene la ecuación del movimiento del medio disipativo.

En el caso de un sólido isótropo, se obtienen unas ecuaciones del movimiento iguales a las de la elasticidad perfecta, si en lugar de los módulos elásticos K y μ , tomamos unos módulos complejos en los que la parte imaginaria es función de los factores Q_s y Q_p . De éste modo, a partir de los mecanismos disipativos, se llega al planteamiento formal de la Sismología, expuesto en el capítulo 1.

8.2.- FUNCION DISIPATIVA

El movimiento macroscópico de los cuerpos inmersos en un medio exterior va acompañado, en general, de procesos irreversibles de rozamiento que conducen a una transformación de energía cinética en calor, esto es, a una disipación de energía.

El estudio puramente mecánico de este movimiento es, claramente imposible; dado que la energía del movimiento macroscópico se transforma en energía de movimiento térmico de los átomos del cuerpo y del medio, ese estudio nos exigiría establecer las ecuaciones del movimiento para todas esas partículas. Esto hace que la cuestión de si es posible o no establecer unas ecuaciones del movimiento del medio que contengan únicamente las coordenadas macroscópicas de los cuerpos, corresponda al campo de la Física Estadística.

Este problema, por otra parte, no se puede resolver de modo general. Dado que el movimiento de los átomos del cuerpo depende, no sólo del de éste en el instante considerado, sino también de la historia previa de ese movimiento, en las ecuaciones del movimiento intervendrán, en general, no sólo las coordenadas generalizadas de los cuerpos: q_1, q_2, \dots, q_n y sus derivadas primeras y segundas, sino también derivadas de orden superior (intervendrá un operador integral de las coordenadas). En estas condiciones no existe una función de Lagrange para el movimiento macroscópico del sistema.

En el estudio del problema del establecimiento de las ecuaciones del movimiento que sigue a continuación, se emplean conceptos y desarrollos de la teoría de fluctuaciones termodinámicas (ver Capítulo 12 del libro de Física Estadística de Landau y Lifshitz, 1969). Se supone para ello, el sistema en un estado de equilibrio incompleto, y un conjunto de magnitudes x_1, \dots, x_n , tales que atribuyéndoles un valor determinado (diferente al de su fluctuación media), se puede caracterizar dicho estado de equilibrio incompleto. Es decir, el tiempo de

relajación para el establecimiento del equilibrio incompleto con el valor dado de x_1 , es mucho menor que el tiempo de relajación para el establecimiento del equilibrio de esas mismas magnitudes x_1 . En nuestro caso concreto, esto equivale a suponer que los procesos atómicos de disipación de energía que originan las fluctuaciones de las magnitudes x_1 (vectores posición y velocidad o momento, o en el caso que nos interesa, vector desplazamiento), son mucho mas rápidos que los periodos propios de dichas magnitudes (del orden del periodo de la onda sísmica en éste caso); por lo que suponemos un estado de equilibrio de dichos procesos para cada valor de $x_1(t)$.

El problema de establecer unas ecuaciones del movimiento, en un sistema con disipación, puede resolverse de manera general si se supone:

1. El estado del sistema, en un instante dado, queda totalmente determinado por los valores de las coordenadas generalizadas: q_1 y \dot{q}_1 pudiendo prescindir de derivadas de orden superior.
2. El movimiento representa un conjunto de pequeñas oscilaciones en torno a unas posiciones de equilibrio - caso común en éste tipo de problemas y suposición fundamental en la teoría de la elasticidad.

Si elegimos, con éstas condiciones, las coordenadas q_1 de tal modo que en las posiciones de equilibrio sea $q_1=0$; entonces la energía cinética del sistema $K(q_1)$ será una función cuadrática de las velocidades \dot{q}_1 , independiente de las coordenadas q_1 y la energía potencial $U(q_1)$ debida a la acción de las fuerzas externas, será una función cuadrática de las coordenadas q_1 .

Introduzcamos los momentos generalizados p_1 , definiéndolos, como de ordinario, por

$$p_i = \frac{\partial K(\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \quad (8-1)$$

que define los momentos como combinaciones lineales de las velocidades, cumpliéndose además las igualdades

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K(p_i)}{\partial p_i} \quad (8-2)$$

Si se prescinde de los procesos disipativos, se obtienen las ecuaciones ordinarias del movimiento, según las cuales las derivadas de los momentos generalizados respecto del tiempo son iguales a las correspondientes fuerzas generalizadas:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (8-3)$$

Estas ecuaciones (8-2) y (8-3) se encuentran en acuerdo formal con el principio de simetría de los coeficientes cinéticos γ_{ik} , que nos relaciona las magnitudes \dot{x}_i , con las derivadas de la entropía del sistema respecto a las x_i , $\dot{x}_i = - \partial S / \partial x_i$, mediante: (1)

$$\dot{x}_i = - \gamma_{ik} \dot{x}_k \quad (8-4)$$

donde por las magnitudes x_1, \dots, x_{2n} entendemos ahora las coordenadas q_1, \dots, q_n y los momentos p_1, \dots, p_n .

Teniendo en cuenta que el trabajo mínimo necesario para llevar a los cuerpos del estado de equilibrio a las posiciones q_1 con momentos p_1 es $W_{\min} = K(p_1) + U(q_1)$, en este caso las magnitudes X_i serán:

$$\begin{aligned} X_{q_i} &= - \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial W_{\min}}{\partial q_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial q_i} \\ X_{p_i} &= - \frac{\partial S}{\partial p_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial W_{\min}}{\partial p_i} = \frac{1}{T} \frac{\partial K}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (8-5)$$

que verifican las relaciones de Onsager para coeficientes cinéticos

$\gamma_{ik} = -T = -\gamma_{ki}$, debiéndose el signo menos a que $q_1(t) = q_1(-t)$ y $p_1(t) = -p_1(-t)$. (Para tener una idea clara de estas relaciones, consultar el libro ya mencionado de Física Estadística de Landau y Lifshitz, al que se sigue en esta sección).

Según ese principio de simetría de los coeficientes de (8-4),

(1) A lo largo de este capítulo se adoptará el convenio de suma en índices repetidos.

podemos escribir ahora las ecuaciones del movimiento, teniendo en cuenta los procesos disipativos, añadiendo a los segundos miembros de (8-2) y (8-3) combinaciones lineales de X_p y X_q , de tal modo que se sigan cumpliendo las relaciones de simetría de los coeficientes oi néticos. Ahora bien, la ecuación (8-2) no puede modificarse; en efecto, dicha expresión es consecuencia de la definición de momento ge neralizado y no tiene nada que ver con la existencia de procesos disi pativos. Por tanto, sólo podremos añadir a (8-3) combinaciones lineales de X_p ($1/T \partial K / \partial p_i$), ya que en caso contrario se violaría la simetría de los coeficientes (1).

El sistema de ecuaciones que resulta (1) es:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial p_k} \quad (8-6)$$

donde los coeficientes cumplen $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$. Sustituyendo los valores de la ecuación (8-2) para las velocidades generalizadas \dot{q}_i , podemos escribir (8-6)

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (8-7)$$

que es el sistema buscado de ecuaciones del movimiento.

(1) Si escribimos de modo explícito:
$$\begin{cases} \dot{q}_i = -\gamma_{q_i q_k} X_{q_k} - \gamma_{q_i p_k} X_{p_k} \\ \dot{p}_i = -\gamma_{p_i p_k} X_{p_k} - \gamma_{p_i q_k} X_{q_k} \end{cases}$$

de la igualdad (8-2): $\dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i} = -T X_{p_i}$; luego $\begin{cases} \gamma_{q_i p_k} = -T \delta_{ik} \\ \gamma_{q_i q_k} = 0 \end{cases}$

Por cumplir las relaciones, $\gamma_{q_i p_k} = -\gamma_{p_i q_k}$, se tiene:

$$\dot{p}_i = -\gamma_{p_i p_k} \frac{1}{T} \frac{\partial K}{\partial p_k} - T \delta_{ik} \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial q_k} = -\gamma_{ik} \frac{\partial K}{\partial p_k} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

que es la ecuación (8-6) con $\gamma_{ik} = \frac{\gamma_{p_i p_k}}{T}$.

Vemos así que la existencia de procesos de disipación conduce, en la aproximación considerada, a la aparición de fuerzas de rozamiento o disipativas que dependen linealmente de las velocidades \dot{q}_i . Teniendo presentes las relaciones de simetría $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$, estas fuerzas se pueden expresar como derivadas respecto de las velocidades \dot{q}_i de una función cuadrática llamada función disipativa,

$$\psi = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (8-8)$$

Entonces

$$p_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_i} \quad (8-9)$$

Introduciendo la función de Lagrange $L = K - U$, las ecuaciones del movimiento se pueden escribir en la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_i} \quad (8-10)$$

que se diferencia de las ecuaciones ordinarias de Lagrange en la derivada de la función disipativa que aparece en el segundo miembro.

La existencia de procesos disipativos conduce a una disminución de la energía mecánica total $(K+U)$:

$$\frac{d}{dt} (K+U) = \frac{\partial K}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{q}_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)$$

sustituyendo (8-9) y aplicando el teorema de Euler para funciones homogéneas

$$\frac{d}{dt} (K+U) = - \dot{q}_i \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_i} = - 2 \psi \quad (8-11)$$

resulta pues que la función disipativa (8-8) vale la mitad de la disminución de la energía mecánica por unidad de tiempo.

8.3.- TENSIONES DISIPATIVAS O VISCOSAS

En la sección anterior se ha planteado el tema del estudio de los procesos disipativos de modo general; vamos ahora a centrarlo en el campo de la Teoría de la Elasticidad, que es el que interesa en Sismología.

En un sistema mecánico que efectúa un movimiento con disipación de energía, la fuerza disipativa correspondiente a la coordenada generalizada q_i es

$$F_i = - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_i}$$

El cambio en la función disipativa provocado por un cambio infinitesimal en las velocidades \dot{q}_i es:

$$\delta \psi = - F_i \delta \dot{q}_i \quad (8-12)$$

La generalización de (8-12) al caso continuo de la elasticidad es sencilla. El estado del sistema se determina, en este caso, mediante una sucesión continua de coordenadas generalizadas que son las componentes del vector desplazamiento, \vec{u} , para cada punto del cuerpo. Podemos escribir (8-12) de forma integral como:

$$\delta \int \varphi dV = - \int f_i \delta u_i dV \quad (8-13)$$

siendo φ la función disipativa por unidad de volumen y f_i las componentes de las fuerzas disipativas por unidad de volumen.

La función φ , que describe la fricción o disipación interna, debe ser cero si no existe movimiento interno, en particular, si el cuerpo realiza como un todo un movimiento traslatorio o rotatorio puro. Es decir $\varphi = 0$, si $\vec{u} = \text{constante}$ o $\vec{u} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$. Esto significa que la función debe depender, no de la propia velocidad sino de su gradiente y puede contener únicamente combinaciones de las derivadas tales que $\varphi = 0$ si $\vec{u} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$. Estas son las sumas

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

es decir, las derivadas temporales $\dot{\epsilon}_{ij}$ de las componentes del tensor de deformaciones.

La forma general de la función disipativa φ para un cuerpo deformado es

$$\varphi = \frac{1}{2} \eta_{iklm} \dot{\epsilon}_{ik} \dot{\epsilon}_{lm} \quad (8-14)$$

El tensor $\bar{\eta}$ de disipación o viscosidad es de orden cuatro y tiene las siguientes propiedades de simetría:

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik} = \eta_{kilm} = \eta_{lkm i}$$

Le son aplicables todas las consideraciones de simetría del tensor de módulos de elasticidad S_{iklm} , ya que la expresión es totalmente análoga a la energía de deformación de un sólido anisótropo:

$$F = \bar{F}_0 + \frac{1}{2} S_{iklm} \epsilon_{ik} \epsilon_{lm}$$

Por lo tanto todas las consideraciones de simetría aplicables al tensor \bar{S} son también válidas para el tensor $\bar{\eta}$.

En particular, el tensor $\bar{\eta}$ en un cuerpo isótropo (aproximación empleada en sismología para tratar la Tierra) tiene solamente dos componentes independientes y φ puede escribirse, de modo análogo al de la energía elástica de un cuerpo isótropo, como:

$$\varphi = \eta \left(\dot{\epsilon}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{\epsilon}_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \dot{\epsilon}_{ll}^2 \quad (8-15)$$

donde se supone sumación en índices repetidos, así, el primer término sería la suma de los cuadrados de las componentes desviatorias o de corte puro y el segundo el cuadrado de la suma de los elementos diagonales del tensor $\dot{\epsilon}$; η y ζ son los dos coeficientes disipativos. Como es una función definida positiva, los coeficientes η y ζ también son positivos.

La expresión (8-13), por otra parte, es enteramente análoga a la que se obtenía para la energía libre elástica F :

$$\delta \int F dV = - \int F'_i \delta u_i dV \quad (8-16)$$

siendo $F'_i = \frac{\partial F}{\partial x_j}$ la fuerza por unidad de volumen. Por lo tanto, se puede escribir la expresión para la fuerza disipativa f_i , en términos del tensor $\dot{\epsilon}_{ij}$ por analogía con la expresión de F'_i en términos de ϵ_{ij} . Se tiene que:

$$f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}$$

donde el tensor de tensiones disipativas τ'_{ij} está definido por:

$$\tau'_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \eta_{ijelm} \dot{\epsilon}_{lm}$$

en total analogía con la expresión para el tensor de esfuerzos τ_{ij} .

En el caso de un medio isótropo, la expresión para el tensor $\bar{\tau}'$ es:

$$\tau'_{ij} = 2\eta \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{\ell\ell} \right) + \zeta \dot{\epsilon}_{\ell\ell} \delta_{ij} \quad (8-17)$$

8.4.- ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN UN MEDIO DISIPATIVO

La existencia de procesos disipativos del tipo mencionado, puede tenerse en cuenta, en las ecuaciones del movimiento, simplemente reemplazando en ellas el tensor de tensiones τ_{ij} por la suma $\tau_{ij} + \tau'_{ij}$:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j}, \quad \text{siendo } \bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \tau'_{ij} \quad (8-18)$$

En un medio isótropo - aproximación utilizada para el interior de la Tierra en el estudio de la propagación de las ondas sísmicas -, la expresión que liga el tensor de esfuerzos con el de deformaciones es:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{\ell\ell} \right) + \kappa \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} \quad (8-19)$$

Empleando (8-17) para las tensiones disipativas, se tiene

$$\bar{\tau}_{ij} = 2 \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{\ell\ell} \right) + \left(\kappa + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} \quad (8-20)$$

Por lo tanto, las nuevas ecuaciones del movimiento en el medio disipativo, expresadas exclusivamente en función de los vectores desplazamiento u , serán formalmente idénticas a las que resultan en teoría de la elasticidad perfecta, si tomamos en lugar de los módulos elásticos de compresibilidad K y rigidez μ , los módulos K' y μ' , que resultan de definir entre $\bar{\tau}_{ij}$ y ϵ_{ij} una relación como la (8-19). Es decir:

$$K' = K + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mu' = \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t}$$

Tendremos ahora como ecuaciones del movimiento:

$$\left(\kappa' + \frac{4}{3}\mu'\right) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu' \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-21)$$

o su equivalente, empleada frecuentemente:

$$(\lambda' + 2\mu') \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu' \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-22)$$

siendo $\lambda' = \kappa' - \frac{2}{3}\mu'$

Estas ecuaciones, (8-21) ó (8-22), son las nuevas ecuaciones del movimiento del medio isótropo en presencia de procesos disipativos. La ecuación (8-21) la podemos escribir en forma que será utilizada más adelante como:

$$\left[\left(\kappa + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{4}{3} \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \left[\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-21')$$

La expresión (8-20) muestra la dependencia temporal en las relaciones entre esfuerzos y deformaciones, y que en el Capítulo 1, se definió como anelasticidad.

Aún cuando con (8-21), (8-21') ó (8-22) se ha llegado al final del camino de introducir procesos disipativos de energía en las ecuaciones del movimiento, dichas fórmulas resultan poco familiares a la hora de su aplicación en Sismología. Veamos que consideraciones hay que realizar para llegar a una expresión de dichas ecuaciones, en las que figuren en lugar de los coeficientes ζ y η , otros factores mucho más familiares como son los factores de calidad para deformaciones de compresión hidrostática Q_K y para deformaciones de corte o cizalla pura Q_μ . A partir de ellos se puede obtener ya la ecuación del movimiento, en función de los factores de calidad Q_K y Q_μ para ondas P y S.

Cualquier deformación puede representarse como suma de una deformación de corte y una compresión hidrostática. Para ello basta utilizar la identidad:

$$\epsilon_{ij} = \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{ll} \quad (8-23)$$

donde el primer término del segundo miembro es, evidentemente, un corte o deslizamiento puro, ya que la suma de sus términos diagonales es igual a cero. Veamos cual son las pérdidas de energía en ambos tipos de deformación.

1. Deformaciones de compresión hidrostática.

En éste tipo de deformaciones, la relación entre esfuerzos y deformaciones viene dada exclusivamente por el módulo de compresibilidad K. Supongamos una deformación de compresión hidrostática monocromática

$\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii} e^{i\omega t}$. El factor de disipación para ésta deformación y que en trabajos de Sismología se representa por Q_K^{-1} -definido de modo formal como: K^*/K -, es igual a :

$$Q_K^{-1} = \frac{\Delta E}{2\pi E_{max}}$$

donde ΔE es la energía disipada por periodo y por unidad de volumen y E_{max} es la energía elástica de deformación por unidad de volumen cuando la deformación es máxima.

Como $\Delta E = \bar{E} T$, siendo \bar{E} la velocidad media de disipación de energía en ese periodo, y tal como se vió en (8-10) $|\dot{E}| = 2\bar{\psi}$ luego: $|\bar{E}| = 2\bar{\psi}$, refiriéndonos a magnitudes por unidad de volumen, podemos escribir:

$$Q_K^{-1} = \frac{2\bar{\psi} \cdot T}{2\pi E_{max}} = \frac{\bar{\psi}}{2\omega \bar{E}} \quad (8-24)$$

en donde se ha tenido en cuenta que E_{max} es igual a $2\bar{E}$ para una deformación monocromática como la estudiada.

Para esta deformación:

$$\bar{\psi} = \frac{\tau}{2} \bar{\epsilon}_{ii}^2 \quad (8-25)$$

$$\bar{E} = \frac{K}{2} \bar{\epsilon}_{ii}^2$$

significando la raya superior el promedio temporal en un periodo.

Introduciendo (8-25) en (8-24) y considerando que: $\bar{\epsilon}_{ii}^2 = \omega^2 \bar{\epsilon}_{ii}^2$

se tiene:

$$Q_{\kappa}^{-1} = \frac{\zeta_{1/2} \omega^2 \bar{\epsilon}_{ii}^2}{\omega \kappa_{1/2} \bar{\epsilon}_{ii}^2} = \frac{\zeta \omega}{\kappa}$$

luego el valor del coeficiente ζ es:

$$\zeta = \frac{\kappa}{\omega Q_{\kappa}} \quad (8-26)$$

2. Deformaciones de corte.

Para una deformación de corte puro monocromática: $\epsilon'_{ij} = \epsilon'_{ij} e^{i\omega t}$ el factor de disipación se representa por Q_{μ}^{-1} -definido formalmente como: μ^*/μ -.

La relación que liga el coeficiente con el módulo de rigidez, se puede calcular de manera análoga a como se hizo en el caso de deformaciones de compresión hidrostática, teniendo en cuenta que para una deformación de corte:

$$\bar{\Psi} = \eta (\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{\ell\ell})^2$$

$$\bar{E} = \mu (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{\ell\ell})^2$$

y que: $\overline{(\dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}'_{\ell\ell})^2} = \omega^2 (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{\ell\ell})^2$ se llega finalmente a un valor para Q_{μ}^{-1} :

$$Q_{\mu}^{-1} = \frac{\eta \omega}{\mu}$$

y con ello, un valor para η :

$$\eta = \frac{\mu}{\omega Q_{\mu}} \quad (8-27)$$

(8-26) y (8-27) nos proporciona los valores de los coeficientes de la función disipativa en función de los factores de disipación en compresión hidrostática y en corte puro (Q_{κ}^{-1} y Q_{μ}^{-1} respectivamente).

Sustituyendo (8-26) y (8-27) en (8-21') obtenemos la ecuación del movimiento en un medio disipativo e isotrópico:

$$\left[k \left(1 + \frac{1}{\omega Q_{\kappa}} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{4}{3} \mu \left(1 + \frac{1}{\omega Q_{\mu}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \left[\mu \left(1 + \frac{1}{\omega Q_{\mu}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-28)$$

que puesta en función de los coeficientes de Lamé λ y μ es:

$$(\lambda + 2\mu) \left[1 + \left(\frac{\kappa}{\omega Q_\alpha} + \frac{\mu}{\omega Q_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla \cdot \vec{u} - \left[\mu \left(1 + \frac{1}{\omega Q_\mu} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla \cdot \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-29)$$

Ahora estamos en condiciones de volver a escribir estas ecuaciones, en las que figuran los factores Q_κ y Q_μ , de modo que en su lugar aparezcan los Q_α y Q_β , factores de calidad para ondas P y S.

Las relaciones que ligan Q_κ y Q_μ con Q_α y Q_β (Anderson y Hart, 1978), son: ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} Q_\beta &= Q_\mu \\ Q_\alpha^{-1} &= L Q_\mu^{-1} + (1-L) Q_\kappa^{-1} \end{aligned} \quad (8-30)$$

$$\text{siendo: } L = \frac{4}{3} \left(\beta/\alpha \right)^2 \quad (8-31)$$

α la velocidad de las ondas P

β la velocidad de las ondas S

Si, en (8-29), tenemos en cuenta los valores de α , β y κ : $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ y $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, se deduce si empleamos (8-30):

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\omega Q_\kappa} + \frac{\mu}{\omega Q_\mu} &= \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\omega Q_\kappa (\lambda + 2\mu)} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu) Q_\mu} = \frac{[1 - \frac{4}{3}(\beta/\alpha)^2]}{\omega Q_\kappa} + \frac{4/3 (\beta/\alpha)^2}{\omega Q_\mu} \\ &= \frac{1-L}{\omega Q_\kappa} + \frac{L}{\omega Q_\mu} = \frac{1}{\omega Q_\alpha} \end{aligned} \quad (8-32)$$

Así pues, la ecuación (8-29) se puede escribir finalmente, considerando (8-30) y (8-32):

$$(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{1}{\omega Q_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \cdot \vec{u} - \mu \left(1 + \frac{1}{\omega Q_\beta} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \cdot \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (8-33)$$

(1) Dichas relaciones son fáciles de demostrar si se tienen en cuenta

las definiciones del capítulo 1: $Q_\kappa^{-1} = \frac{\lambda + 2\mu^*}{\lambda + 2\mu} = \frac{\kappa^* + 4/3 \mu^*}{\kappa + 4/3 \mu}$

$Q_\beta^{-1} = \frac{\mu^*}{\mu}$

de las que se obtienen (8-30) sustituyendo κ^*/κ por Q_κ^{-1} y μ^*/μ por Q_β^{-1}

Estas son las ecuaciones del movimiento en un medio disipativo, en función de los factores Q_s y Q_p , que coinciden con las de Knopoff (1956), que obtuvo la misma expresión tomando en lugar de ω , su módulo $|\omega|$; teniendo en cuenta el proceso seguido para llegar a (8-33), es evidente que ω es positiva ya que se introducía como $2\pi/T$, donde T era el periodo de la deformación monocromática.

Se ha llegado, por lo tanto, a las ecuaciones generales del movimiento en un medio disipativo, suponiendo válidas las hipótesis de la sección 8.1. El método empleado fue estudiar el problema como fluctuaciones de los valores del vector desplazamiento \vec{u} , en cada instante, provocadas por procesos atómicos, causantes de la disipación de energía, cuyos tiempos de relajación son mucho menores que los del vector desplazamiento.

C A P I T U L O 9

RESUMEN Y CONCLUSIONES

A lo largo de ésta memoria se ha presentado el problema de la determinación de la atenuación de las ondas sísmicas internas en el Manto de la Tierra, representada por el factor de disipación específica o fricción interna: Q^{-1} y se han analizado los posibles mecanismos atómicos que pueden explicar dicha fricción interna y que, de ser desvelados, nos permitirán un mejor conocimiento de la composición y estado del Manto.

En la primera parte del trabajo, que podría llamarse numérica, se propuso un método prácticamente algorítmico para la obtención de una distribución intrínseca de Q^{-1} con la profundidad. El proceso se basaba en dos hipótesis: a) la separabilidad del espectro focal en producto de parte espacial y temporal y b) que el factor Q^{-1} no es función de la frecuencia.

La justificación de la primera hipótesis, en terremotos de magnitud menor que 7, puede verse en los trabajos de Teng (1968), y Teng y Ben-Menahem (1965).

La validez de la segunda hipótesis está respaldada por muchas medidas de campo y laboratorio realizadas en rocas, cristales, metales y óxidos en un amplio rango de frecuencias. Sin embargo, las condiciones en que fueron realizadas dichas medidas no permiten extrapolar de un modo riguroso hasta los valores de las presiones y temperaturas del Manto y, de acuerdo con muchos investigadores, la cuestión de la dependencia de Q^{-1} respecto de la frecuencia, está aún por responder en estudios de mucha mayor complejidad, que los hasta ahora emprendidos.

A partir de éstas hipótesis se obtenía de la relación espectral de amplitudes para distintas frecuencias respecto a la de una frecuen-

cia de referencia, para cada onda, un sistema superdeterminado cuya solución, obtenida al resolver el sistema normal equivalente por el método de eliminación de Gauss, nos proporcionaba los valores medios del factor de disipación a lo largo de todo su recorrido para cada onda: $Q^{-1}(\Delta)$. Al variar la frecuencia de referencia, se obtenían otros valores de $Q^{-1}(\Delta)$ para cada estación. Del conjunto de los resultados para distintas frecuencias de referencia se obtenía un factor de disipación medio $\bar{Q}^{-1}(\Delta)$ con su desviación típica correspondiente $\sigma(\bar{Q}^{-1}(\Delta))$. De estos valores y con la distribución de velocidades CAL511A a la que se asociaron unas desviaciones típicas resultado de la comparación con distribuciones de otros autores, se procedió al cálculo del factor Q_{α}^{-1} a distintas profundidades en el Manto. Para ello se redujo la ecuación integral que proporciona $Q_{\alpha}^{-1}(r)$ a partir de $Q_{\beta}^{-1}(\Delta)$, a un conjunto superdeterminado de ecuaciones lineales cuyas incógnitas eran los valores de Q_{α}^{-1} en distintas zonas del Manto en cada una de las cuales se suponía Q_{α}^{-1} constante.

De la resolución de este sistema, se obtuvieron los modelos MPD2, 3, 5 y 8, donde el número indica las zonas para las que se ha hallado el valor probable de Q_{α}^{-1} así como su desviación típica. Los resultados fundamentales eran:

- a) Atenuación en el Manto Superior un orden de magnitud mayor que en el Manto Inferior.
- b) Máximo de atenuación hacia los 400 km., aunque el valor obtenido entre los 40 - 150 km. poseía una gran dispersión
- c) Disminución brusca (un orden de magnitud) alrededor de los 800 km.
- d) Mínimo de Q_{α}^{-1} entre los 1000 y 2000 km. de profundidad.
- e) Crecimiento progresivo de Q_{α}^{-1} a partir de los 2000 km. para llegar a un valor a $0,50 \cdot 10^{-2}$ en la frontera con el núcleo ($Q_{\alpha} \sim 200$).

Podemos señalar que el modelo obtenido concuerda totalmente en los rasgos más esenciales: a), c) y d) con los de otros autores que emplearon ondas internas P en sus estudios, como Teng (1968), Mikumo y Kurita (1967) y Kanamori (1967).

La mayor diferencia, es la referente a la localización del máximo de atenuación, que en este modelo es más profunda que en los basados en la inversión de datos de ondas superficiales, como el MM8 o SL8 de Anderson et al. Muy posiblemente y en lo que se refiere a este punto sean más fiables los resultados obtenidos mediante ondas superficiales, ya que en nuestro modelo las dispersiones eran grandes.

A la luz de los resultados y comparaciones realizadas, el modelo de cálculo propuesto parece adecuado aún cuando adolezca de limitaciones importantes.

Entre esas limitaciones, la más notable es el desconocimiento de la estructura de la Corteza bajo las estaciones registradoras de las ondas sísmicas. Otras posibles fuentes de dispersión son los ruidos de fondo, truncación de señal, variaciones laterales etc. Todo es to sería referente a los datos. Por lo que respecta al proceso mismo de cálculo, convendría mejorarlo desde un punto de vista estadístico estudiando un número mayor de terremotos y tomando más puntos en el análisis de Fourier (para lo cual deberíamos conocer la respuesta de la Corteza en cierto detalle). Asimismo habría que considerar una distribución de Q^{-1} que en el Manto Superior dependiese no solo de la coordenada radial r , sino también de las otras coordenadas esféricas θ y φ , para poder tener en cuenta las importantes variaciones laterales de los 400 primeros km. del Manto.

En conjunto se puede decir que se cumplió el objetivo que se persigue al trabajar con ondas internas, de encontrar unos límites para los valores de Q_{α}^{-1} en zonas significativas del Manto.

Este modelo tosco de distribución de Q_{α}^{-1} con la profundidad, lógicamente, debe refinarse con resultados provenientes de ondas superficiales y modos normales de oscilaciones libres, aún cuando respecto a estos últimos, si tenemos en cuenta que sus periodos son del orden de horas, es posible que afecten a procesos que las ondas internas no afectan, por lo que pudiera no ser totalmente válido suponer una estructura disipativa común para ondas sísmicas y oscilaciones libres o deducir una única de los datos de ambas.

La segunda parte de esta memoria, del Capítulo 5 al 7, tiene un carácter más teórico y estudia el problema de la anelasticidad del Manto desde el punto de vista de los mecanismos de naturaleza atómica que la provocan. La determinación de estos mecanismos es un instrumento valiosísimo para lograr un mejor conocimiento sobre los materiales que forman el Manto, ya que nos proporcionan indicación sobre magnitudes complementarias a las de estudios basados en la elasticidad perfecta, como son energías, volúmenes y densidad de defectos; así como temperaturas ya que dichos mecanismos están fuertemente influidos por esta magnitud.

Se analizaron los distintos mecanismos que pueden ser responsables de la anelasticidad del Manto. Teniendo en cuenta los órdenes de magnitud de Q_{α} y Q_{β} de los resultados experimentales aparecen como más probables los de relajación en fronteras de grano, fusión parcial (en la zona de bajas velocidades), y un mecanismo activado térmicamente y de origen desconocido.

En este trabajo, se ha intentado encontrar una posible base fisica de este último mecanismo, que surgía por el aumento del número de defectos puntuales, inducido por el trabajo realizado por la onda sísmica.

El mecanismo resultante, aplicado a ondas internas y para un Manto homogéneo respecto al fenómeno considerado, permite hallar valores

numéricos para la fricción interna en el Manto.

Las aproximaciones empleadas hacen que el modelo tenga un carácter especulativo. Los resultados obtenidos se muestran en un buen acuerdo con los experimentales de Sismología excepto los primeros 50 km. del Manto Superior.

Este mecanismo da lugar a un factor de disipación Q_a^{-1} :

- a) Un orden de magnitud mayor en el Manto Superior que en el Inferior.
- b) Que presenta un máximo entre los 200 - 400 km., entre zona de bajas velocidades y comienzo de zona de transición.
- c) Del mismo orden de magnitud para ondas transversales que longitudinales: $Q_a^{-1} \approx Q_\beta^{-1}$.
- d) Independiente de la frecuencia, supuesta válida la hipótesis empleada de $\tau \ll 2\pi/\omega$, siendo τ el tiempo medio de relajación para creación de defectos.

Un rasgo muy interesante del modelo que resulta es que para conseguir un mejor ajuste a los datos experimentales se deben efectuar cambios apreciables en energías y volúmenes de activación alrededor de los 800 km. y en la frontera Manto-Núcleo. Esto significaría que en dichas zonas hay una transición hacia fases distintas, más compactas y con mayores energías de cohesión en el primer caso (~800 km.) y menores en el segundo (frontera Manto-Núcleo).

La insuficiencia de este mecanismo en los primeros 50 km. del Manto es manifestación de algo razonable: es muy poco probable que un solo mecanismo pueda ser el principal causante de la anelasticidad del Manto en todas las zonas de su interior, ya que esto equivaldría a encontrar un mecanismo con igual validez a presiones y temperaturas bajas y muy altas.

Un modelo tentativo para explicar la anelasticidad del Manto,

pensamos que podría tener los siguientes mecanismos fundamentales en las distintas zonas:

<u>Región</u>	<u>Mecanismo dominante</u>
Corteza y primeros 50 km. del Manto	Rozamiento en grietas y hendiduras Dislocaciones y viscosidad en bor- des de grano.
Resto del Manto Superior	Fricción interna debida al aumento de defectos puntuales (vacantes), fusión parcial, viscosidad en fron- teras de grano.
Manto Inferior	Fricción interna debida al aumento de defectos intersticiales y subs- titucionales y procesos de difu- sión que tengan volúmenes de acti- vación ~ 0 .

La importancia del mecanismo estudiado es que, de ser realmente operativo en el Manto, da una expresión a partir de la cual se podrían determinar energías y volúmenes de activación de los materiales de la Tierra, mediante el cálculo de Q^{-1} de los datos sísmicos, lo que nos conduciría a un conocimiento más preciso del interior del Manto.

Para ello, pensamos que primero habría que intentar comprobar en el laboratorio la existencia de este mecanismo de fricción interna para unas condiciones parecidas a las del interior de la Tierra y a unas frecuencias similares a las sísmicas, a fin de que no quede enmascarado por otros mecanismos dominantes a menores presiones y temperaturas y mayores frecuencias.

Si el mecanismo es comprobable, se necesitará un estudio más pre

ciso, eliminando las aproximaciones con las que se ha operado. Una vez conseguida una expresión analítica rigurosa para $Q^{-1}(E^*, V^*, T)$, mediante integración numérica $Q^{-1}(a) = \frac{1}{T} \int \frac{ds}{Q(\eta)V(\eta)}$ podemos determinar el valor de los parámetros E^* , V^* , que conducen a una Q^{-1} , igual a la experimental. Comparando esos valores con los que se obtuvieran en el laboratorio para materiales presumiblemente similares a los del Manto (silicatos, óxidos etc.) se puede conseguir la identificación de los materiales.

Se requeriría también un estudio profundo de la influencia de este mecanismo en los demás, y la importancia en él de los límites de grano y la fusión parcial (Es particularmente interesante la idea de Nachtrieb (1957), que relacionaba la fusión con un número crítico de vacantes móviles).

Por último, se relacionó el tratamiento formal de la anelasticidad mediante módulos elásticos complejos de la primera parte de la memoria con la realidad física de los procesos atómicos disipativos de la segunda parte. Esto se efectuó incluyendo mecanismos como el propuesto de naturaleza atómica en la ecuación del movimiento de un medio elástico, utilizando el concepto de fluctuación termodinámica del vector desplazamiento \vec{u} . Se obtuvo una ecuación igual a la de la elasticidad perfecta, salvo por la presencia de unos nuevos módulos de elasticidad y rigidez en los que figuran los factores Q_K^{-1} y Q_P^{-1} para ondas P y S respectivamente, dando cuenta de la dependencia temporal de las tensiones y deformaciones que es la característica fundamental del fenómeno anelástico.

APENDICE A

LISTADOS DE LOS PROGRAMAS SYSTEQIN, SYSTEQ2Q Y SIMPQIN UTILIZADOS EN LOS CAPITULOS 3 Y 4 PARA LA DETERMINACION DE $Q(\Delta)$ Y $Q(r_j)$.

En este Apéndice se han listado los módulos fuente de los programas:

SYSTEQ2Q: Resolución por el método de eliminación de Gauss del sistema normal de ecuaciones (3-11), para el cálculo de $Q(\Delta_1)$.

SYSTEQIN: Resolución del sistema normal (4-18), para el cálculo de $Q(r_j)$.

SIMPQIN : Resolución del sistema superdeterminado (4-17) por el método Simplex de programación lineal, para la determinación de $Q(r_j)$.

Hay que señalar que el programa SYSTEQ2Q resulta de substituir en SYSTEQIN la subrutina LECT por otra LECT que se ha indicado con un asterisco, y de suprimir la subrutina de condensación de coeficientes (COND).

SYSTEM.IN

```

C ESTE PROGRAMA REALIZA EL CALCULO DEL SISTEMA AX=B CON METODO DE
  DIMENSION A(8100)
  DOUBLE PRECISION R(90),E(90),B(90),XSOL(90),AX(90)
  DATA A/8100*0./,B/90*0./,XSOL/90*0./,E/90*0./,AX/90*0./,R/90*0./
C SE LEEN LOS DATOS DE ENTRADA. N=NUMERO DE INCOGNITAS
  READ(5,500)N,IMAX,TOLX
  NN=N*N
C SE LEEN LOS COEF. DE LAS INCOG. Y LOS INDEP. EN SUBROUTINE
  CALL LECT(A,B,N)
500 FORMAT(2I2,E15.6)
C NI ES EL NUMERO DE ITERACIONES
  NI=0
  CALL SYSSOL(A,XSOL,B,N)
55 DO 20 J=1,N
20 XSOL(J)=XSOL(J)+E(J)
  WRITE(6,100) NI
  WRITE(6,101)(XSOL(J),E(J),J=1,N)
100 FORMAT(10X,'SOLUCION APROXIMADA Y ERROR DE LA SOLUCION',10X,
  'SOLUCION NUMERO',I4)
101 FORMAT(1X,E15.6,'+/-',E15.6)
C COMIENZA UNA NUEVA ITERACION
  NI=NI+1
  IF (NI.GT.NIMAX) GO TO 60
C AX ES LA MATRIZ PRODUCTO DE A Y X Y R ES EL RESIDUO R=B-AX
  DO 40 I=1,N
  AX(I)=0.0
  DO 30 J=1,N
30 AX(I)=AX(I)+A(I+N*(J-1))*XSOL(J)
40 R(I)=B(I)-AX(I)
  DO 50 J=1,N
50 E(J)=0.0
C CALCULO DE SOLUCIONES PARA LA ECUACION DE RESIDUOS A=E/R
  CALL SUBST(R,E,N)
  DO 80 I=1,N
  REXSOL = E(I)/XSOL(I)
  AFXSOL=ABS(REXSOL)
  IF (AFXSOL.GT.TOLX) GO TO 55
80 CONTINUE
  DO 22 J=1,N
22 XSOL(J)=XSOL(J)+E(J)
  WRITE(6,300)
300 FORMAT(1H1,'*** LA SOLUCION MEJORADA DE MODU ITERATIVO ES ***')
  WRITE(6,101)(XSOL(I),E(I),I=1,N)
  GO TO 70
60 WRITE(6,200)
200 FORMAT(20X,'*** FIN DEL PROCESO ITERATIVO***')
C SOLUCION DEL SISTEMA NORMAL DE ERRORES DE LOS COEFICIENTES
70 WRITE(6,400)
  CALL ERROR(N,B,XSOL)
  CALL SUBST(B,XSOL,N)
  WRITE(6,600)(XSOL(J),J=1,N)
400 FORMAT(1H1,' ** SOLUCION DEL SISTEMA NORMAL DE ERRORES **')
600 FORMAT(1H1,' ** ERRORES EN LAS INCOGNITAS **/(5X,10E12.5)')
  STOP
  END
  SUBROUTINE SYSSOL(A,X,B,N)
C RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES A*X=B
  DIMENSION A(N,N),X(N),B(N)
  DOUBLE PRECISION X,B
  COMMON IPIVOT(90),W(90,90)
C SE INICIALIZA A CERO EL VECTOR IPIVOT CONTIENE LA ESTRATEGIA DE PIV
  DO 10 I=1,N

```

```

10 IPIVOT(I)=0
   NN=NN+N
   DO 12 I=1,N
     DO 12 J=1,N
12   A(I,J)=A(I,J)
   CALL FACTOR(N,IFLAG)
   GO TO(20,11),IFLAG
11 WRITE(6,501)
501 FORMAT(1H1,'MATRIZ SINGULAR')
   GO TO 1
20 CONTINUE
   WRITE(6,610)(H(I),I=1,N)
   CALL SUBST(B,X,N)
   WRITE(6,610)(X(I),I=1,N)
610 FORMAT(1H 6F15.8)
1   RETURN
END
SUBROUTINE FACTOR(N,IFLAG)
  DIMENSION D(90)
  COMMON IPIVOT(90),W(90,90)
  IFLAG=1
C  ESTA SUBROUTINE CALCULA SI ES POSIBLE LA FACTORIZACION TRIANGULAR DE LA
C  MATRIZ A(N,N), GUARDANDO EL RESULTADO EN OTRA W(N,N) Y LA ESTRATEGIA DE
C  PIVOTAMIENTO EN EL VECTOR IPIVOT
C  SI INICIALIZAN W, IPIVOT, D
  DO 10 I=1,N
    IPIVOT(I)=1
    ROWMAX=0.
    DO 9 J=1,N
      ROWMAX=AMAX1(ROWMAX,ABS(W(I,J)))
      IF(ROWMAX.EQ.0.) GO TO 999
10  D(I)=ROWMAX
C  EL ALGORITMO DE GAUSS MEDIANTE PIVOTAMIENTO PARCIAL
  NM1=N-1
  IF(NM1.EQ.0.) RETURN
  DO 20 K=1,NM1
    J=K
    KP1=K+1
    IP=IPIVOT(K)
    COLMAX=ABS(W(IP,K))/D(IP)
    DO 11 I=KP1,N
      IP=IPIVOT(I)
      AWIKOV=ABS(W(IP,K))/D(IP)
      IF(AWIKOV.LE.COLMAX) GO TO 11
      COLMAX=AWIKOV
    J=I
11  CONTINUE
    IF(COLMAX.EQ.0.) GO TO 999
C
    IPK=IPIVOT(J)
    IPIVOT(J)=IPIVOT(K)
    IPIVOT(K)=IPK
    DO 20 I=KP1,N
      IP=IPIVOT(I)
      W(IP,K)=W(IP,K)/W(IPK,K)
      RATIO=-W(IP,K)
      DO 20 J=KP1,N
        W(IP,J)=RATIO*W(IPK,J)+W(IP,J)
      IF(W(IP,N).EQ.0.) GO TO 999
    RETURN
999 IFLAG=2
  WRITE(6,100)ROWMAX,COLMAX
100 FORMAT(1H , 'ROWMAX=',E15.5, 'COLMAX=',E15.5)
  RETURN
END
SUBROUTINE SUBST(B,X,N)

```

```

SUBROUTINE SUBSTIB,X,N)
  DIMENSION B(N),X(N)
  DOUBLE PRECISION X,B
  COMMON IPIVOT(90),W(90,90)
C  ESTA SUBR. RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES WX=B
C  MATRIZ TRIANGULAR
  IF (N.GT.1) GO TO 10
  X(1)=B(1)/W(1,1)
  RETURN
10 IP=IPIVOT(1)
  X(1)=B(IP)
  DO 15 K=2,N
    IP=IPIVOT(K)
    KM1=K-1
    SUM=0.
    DO 14 J=1,KM1
      SUM=W(IP,J)*X(J)+SUM
14 X(K)=B(IP)-SUM
15 X(N)=X(N)/W(IP,N)
  K=N
  DO 20 NPMK=2,N
    KPM1=K-1
    IP=IPIVOT(K)
    SUM=0.
    DO 19 J=KPM1,N
      SUM=W(IP,J)*X(J)+SUM
19 X(K)=(X(K)-SUM)/W(IP,K)
  RETURN
END

SUBROUTINE LECT(ATA,ATB,NINCG)
  DIMENSION ATA(NINCG,NINCG)
  DOUBLE PRECISION ATB(NINCG)
  COMMON/MATR/NEQ,B(90),A(90,90)
C  LEE LAS MATRICES DE COEFICIENTES DEL SISTEMA SUPERC. Y CONST.
C  AT=A, AT=B DEL SISTEMA NORMAL
200 FORMAT(1X,10F12.5)
  CALL COND(NINCG)
  WRITE(6,200)((A(I,J),J=1,NINCG),I=1,NEQ)
  WRITE(8)((A(I,J),J=1,NINCG),I=1,NEQ)
  ENDFILE 8
  RL=IND 8
  WRITE(6,200)(B(I),I=1,NEQ)
  DO 1 I=1,NINCG
    ATB(I)=0.0
    DO 10 J=1,NINCG
      ATA(I,J)=0.0
      DO 100 K=1,NEQ
        ATA(I,J)=ATA(I,J)+A(K,I)*A(K,J)
100 CONTINUE
10 CONTINUE
    DO 11 L=1,NEQ
      ATB(I)=ATB(I)+A(L,I)*B(L)
11 CONTINUE
1 CONTINUE
  WRITE(6,400)((ATA(I,J),J=1,NINCG),I=1,NINCG)
400 FORMAT(1H, '*** ATA ***',10F12.5)
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ERRER(NIN,BERROR,XSOL)
C CALCULA EL VECTOR DE COEFICIENTES INDEPENDIENTES DEL SISTEMA
C QUE RESULTA PARA LOS ERRORES (A1*A)*DX=A1*DB-(A1*DA*DA*DA*DA)
C *B
C DIMENSION DUMMY(90,90),DMXSOL(90)
C DOUBLE PRECISION BERROR(NIN),XSOL(NIN)
C COMMON/MATR/NEC,B(90),A(90,90)
C COMMON/MEKR/DB(90),DA(90,90)
C CALL COND2
DO 1 I=1,NIN
  BERROR(I)=0.0
  DO 10 J=1,NEQ
    DUMMY(I,J)=0.
    DO 11 L=1,NIN
      DO 100 K=1,NEQ
        DUMMY(I,L)=DUMMY(I,L)+A(K,I)*DA(K,J)*DA(K,I)*A(K,J)
100    CONTINUE
11    DMXSOL(I)=DUMMY(I,L)*XSOL(L)
      BERROR(I)=BERROR(I)+A(J,I)*DB(J)-DMXSOL(I)+DA(J,I)*BERROR(I)
C
10  CONTINUE
1  CONTINUE
500 FORMAT(10F8.5)
RETURN
END

SUBROUTINE CONDINZON)
C REALIZA LA LECT. Y FUSION DE LOS COEF.(TIEMPOS) Y SUS DESV. TYPICAS
C CAD. ZONA. LIMIT(I) LIMITE SUP. DE LA ZONA I NREG NO. DE REG.
C UNA ZONA CONTIENE UNA O MAS REG. NEST= NO. DE EST.=ECUAC.
C SUPERDETERMINADO. NZON=NUMERO DE INCOGNITAS
C DIMENSION LIMIT(30)
C COMMON/MEKR/DB(90),DA(90,90)
C COMMON/MATR/NEC,B(90),A(90,90)
C NZON1=NZON+1
C READ(5,300) NREG,NEST
C READ(5,301) LIMIT(I),I=1,NZON1
C WRITE(6,600) NZON, LIMIT(I),I=1,NZON1
C READ(5,400) (A(I,J),J=1,NREG),I=1,NEST
C READ(5,400) (B(I),I=1,NEST)
C DO 1 I=1,NEST
  DO 11 J=1,NZON
    S=0.0
    LIM1 = LIMIT(J)+1
    LIMJ1 = LIMIT(J+1)
    DO 111 K=LIM1,LIMJ1
      S=S+A(I,K)
111    CONTINUE
11    A(I,J)=S
1  CONTINUE
RETURN
C LECTURA DE DESV. TYPICAS
ENTRY COND2
READ(5,400) (DA(I,J),J=1,NREG),I=1,NEST)
READ(5,400) (DB(I),I=1,NEST)
DO 2 I=1,NEST
  DO 21 J=1,NZON
    SS=0.
    DO 200 K=LIM1,LIMJ1
      SS = SS+DA(I,K)**2
200    CONTINUE
    CA(I,J)=SQRT(SS)
21  CONTINUE
2  CONTINUE
300 FORMAT(2F5)
301 FORMAT(10F5)

```

```

400 FORMAT(10F8.5)
600 FORMAT(16,/// ** NUMERO DE ZONAS ',13,' LECTURAS ',13,'
RETURN
END

```

Esta subrutina reemplaza a la correspondiente del programa SYSTE
QIN en el programa SYSTEQ2Q.

```

* SUBROUTINE LECTINS,NF,NFI,NSNF,ATA,ATU)
DOUBLE PRECISION ATA(NSNF)
DIMENSION ATA(NSNF,NSNF),DW(50),T(50),AW(51,50),AP(50,50)
C EL SISTEMA NORMAL TIENE NSNF ECUACIONES CON NSNF INCOGNITAS
C NS NUMERO DE ESTACIONES CONSIDERADAS
C EN ESTA SUBROUTINA SE LEEN LAS MATRICES DEL SISTEMA NORMAL (A1+A)*A
C =AT+B AT(NS*NF,NS*NF), QUE RESULTA DEL SUPERDETERMINADO A*X=B
C SIENDO LAS DIMENSIONES X(NS*NF),B(NS*NF)
C DW(I) SON LOS INCREMENTOS DE PULSACIONES RESPECTO A LA PATRON DW(IP)=
C IP*DDW DW(I)=(I-IP)*DDW
C T(I) ES EL TIEMPO DE LLEGADA A LA ESTACION I
LOGICAL EST(50)
100 FORMAT(F10.5,F3)
101 FORMAT(A4,F8.3)
200 FORMAT(10F8.5)
READ(5,100)DW,IP
WRITE(6,600)NS,NFI
600 FORMAT(10X,2I10)
C SE LEEN LAS AMPLITUDES DEL ESPECTRO DE FRECUENCIAS, LAS EST Y LOS T(I)
DO 11 J=1,NS
READ(5,101,END=40) LST(J),T(J)
READ(5,200)(AW(I,J),I=1,NFI)
WRITE(6,101)EST(J),T(J)
11 CONTINUE
C SE FORMA A PARTIR DE ESTA MATRIZ CUYAS COLUMNAS SON LAS AMPLITUDES DEL
C ESPECTRO DE FREQ. DE CADA ESTACION AWINFI,NSJ, OTRA DE COLUMNAS LOS LN
C DE LAS RELACIONES DE AWINJ/AWINIP,JJ, PARA I DISTINTO DE IP
DO 4 J=1,NS
DO 41 I=1,NFI
IF(I-IP) 42,43,44
42 AR(I,J)=ALOG(AW(I,J)/AW(IP,J))
43 GO TO 41
44 K=I-1
AR(K,J)=ALOG(AW(I,J)/AW(IP,J))
41 CONTINUE
4 CONTINUE
WRITE(6,700)IP
700 FORMAT(5X,'IP=',14,/)

```

```

      DO 11 J=1,NF
      11 A(1,J)=0.0
      C 30 DA VALOR A LAS NF PRIMERAS COLUMNAS
      DO 21 I=1,NF1
      C 50 52 VALOR AL VECTOR DW(I) INCREMENTOS DE POSICION (EVITANDO DW(1))
      21 DW(I)=I*(L-IP)*DOW
      22 DO 23 I=20
      23 K=I-1
      DW(K)=(L-IP)*DOW
      20 CONTINUE
      DO 24 J=1,NI
      A(I,J)=1.0*NS
      DO 24 I=NF1,NSNF
      I=I-1
      A(I,J)=0.5*DW(J)*I*(I-1)
      24 CONTINUE
      2 CONTINUE
      C 50 DA VALOR A LAS RESTANTES HS COLUMNAS
      DO 3 J=NF1,NSNF
      SUMDW2=0.0
      DO 31 I=1,NF
      A(I,J)=(-0.5)*DW(I)*I*(J-NF)
      31 CONTINUE
      DO 32 K=1,NF
      SUMDW2=SUMDW2+DW(K)**2
      32 CONTINUE
      A(I,J)=0.25*(I*(J-NF)**2)*SUMDW2
      3 CONTINUE
      C CALCULO DE A*B, MATRIZ DE TERMINOS INDEPENDIENTES DEL SISTEMA NORMAL
      C PRIMERAS NF FILAS
      DO 5 I=1,NF
      ATB(I)=0.0
      DO 51 J=1,NS
      ATB(I)=ATB(I)+A(I,J)
      51 CONTINUE
      5 CONTINUE
      C NS ULTIMAS FILAS
      DO 6 I=NF1,NSNF
      ATB(I)=0.0
      DO 61 K=1,NF
      ATB(I)=ATB(I)+0.5*(I-NF)*DW(K)*AB(K,I-NF)
      61 CONTINUE
      6 CONTINUE
      RETURN
      END

```

V.A. 0.7,0

29 BLOCKS

SYSTEM SOURCE - STATEMENT 100

BTEND F.SIMPUIN

```

C CALCULA LA SOLUCION DE CHEBYSHEV O MINI-MAX DE UN SISTEMA DE
C MINADO POR EL METODO SIMPLEX DE PROGRAMACION LINEAL
100 FORMAT (10X,'PASO NUMERO',I4/10X,'BASE',10X,'SOLUCION')
200 FORMAT (10X,I4,10X,F10.5)
300 FORMAT (1H1,'EL PROCESO SIMPLEX HA FINALIZADO')
400 FORMAT (214)

C
COMMON IPIVOT(100),A(100,100)
C SE LEE EL NUMERO DE ESTACIONES NS Y DE FRECUENCIAS ANALIZADAS
CON NFR=NFR1-1,QUE INTERVIENEN EN EL SISTEMA DE ECUACIONES
C READ(1,400) NS,NFR1
C NFR=NFR1-1
C NFIL , NCOL SON LOS NUMEROS DE COLUMNAS Y FILAS DE LA MATRIZ
C NFIL=2*NS*NFR+1
C NCOL=NS+NFR+2
C READ(1,400) NFIL,NCOL
DO 1 I=1,NFIL
  IPIVOT(I)=0
  DO 10 J=1,NCOL
    A(I,J)=0.0
  10 CONTINUE
  1 CONTINUE
C SE LLAMA A LA SUBROUTINA QUE DA VALORES A A(I,J),IPIVOT(I)
CALL INICIA(NFIL,NCOL)
C EN LA ULTIMA FILA DE LA MATRIZ SIMPLEX A(NFIL,J) COMENZAMOS LA
C DEL PIVOT, TOMANDO LA COLUMNA CORRESP. AL MAYOR A(NFIL,J) POSITIVO
ICONT=0
  8 ICONT=ICONT+1
  WRITE(3,100) ICONT
  WRITE(3,200) (IPIVOT(I),A(I,1),I=1,NFIL)
  JPIV=2
  CMAX=A(NFIL,2)
  DO 2 J=3,NCOL
    IF(A(NFIL,J).LE.CMAX) GO TO 2
    CMAX=A(NFIL,J)
    JPIV=J
  2 CONTINUE
  IF(CMAX.LE.0.0) GO TO 7
  NFIL=NFIL-1
C DE LA COLUMNA PIVOT A( ,JPIV) TOMAMOS LA FILA QUE DA A(I,1)/A(I,JPIV)
C MINIMO Y POSITIVA, PARA ELLO EL PRIMER COCIENTE POSIT. SI EXISTE,
COMPARANDOLO CON LOS DEMAS, SIN TENER EN CUENTA LOS A(I,JPIV)=0
  DO 3 I=1,NFIL
    IF(A(I,JPIV).EQ.0.0) GO TO 3
    RA=A(I,1)/A(I,JPIV)
    IF(RA.GT.0.0) GO TO 31
  3 CONTINUE
  GO TO 7
31 IPIV=I
  FMIN=RA
  IPIV=IPIV+1
  DO 4 K=IPIV,NFIL
    IF(A(K,JPIV).EQ.0.0) GO TO 4
    RA=A(K,1)/A(K,JPIV)
    IF(RA.LE.0.0.OR.RA.GE.FMIN) GO TO 4
    FMIN=RA
    IPIV=K
  4 CONTINUE
  PIVOT=A(IPIV,JPIV)
C
C CAMBIAMOS LA BASE Y HACEMOS IPIVOT(IPIV)=JPIV-1, EN LA MATRIZ SIMPLEX
C REALIZAN LOS CAMBIOS CORRESPONDIENTES A ESTE CAMBIO DE BASE

```



```

      IPIVOT(IPIV)=JPIV-1
      DO 5 J=1,NCOL
        A(IPIV,J)=A(IPIV,J)/PIVOT
5     CONTINUE
      DO 6 I=1,NFIL
        AIJPIV=A(I,JPIV)
        IF(I.EQ.IPIV) GO TO 6
        DO 61 J=1,NCOL
          A(I,J)=A(I,J)-A(IPIV,J)*AIJPIV
61    CONTINUE
6     CONTINUE
      GO TO 8
7     CALL ORDENA(NFIL)
      WRITE(3,300)
      WRITE(3,100)ICONT
      WRITE(3,200)(IPIVOT(I),A(I,1),I=1,NFIL)
      STOP
      END

C
      SUBROUTINE ORDENA (NFIL)
C ORDENA IPIVOT(I) Y LA SOLUCION A(J,1), EN ORDEN CRECIENTE DE
C LA BASE IPIVOT(J), J=1,NFIL-1
      COMMON IPIVOT(100),A(100,100)
      NFIL2=NFIL-1
      DO 1 J=1,NFIL2
        J1=J+1
        DO 10 K=J1,NFIL1
          IF(IPIVOT(K).GE.IPIVOT(J)) GO TO 10
          IDUMMY=IPIVOT(J)
          ADUMMY=A(J,1)
          IPIVOT(J)=IPIVOT(K)
          A(J,1)=A(K,1)
          IPIVOT(K)=IDUMMY
          A(K,1)=ADUMMY
10     CONTINUE
1     CONTINUE
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE INICIA(NFIL,NCOL)
C LEE LA MATRIZ SIMPLEX POR FILAS, INV TIENE UNA FILA MENOS (LA ULTIMA)
200  FORMAT(10F8.5)
      COMMON IPIVOT(100),A(100,100)
      NFIL1=NFIL-1
      DO 7 J=1,NFIL1
        IPIVOT(J)=NCOL+J-1
C VALORES DE LA PRIMERA COLUMNA
      DO 1 I=1,NFIL1
        A(I,1)=1.0
      NFIL2=NFIL1/2
      NCOL1=NCOL-1
C LEE LA MITAD DE LA MATRIZ EXCEPTO ULTIMA COLUMNA(TERM.INDEP.)
      READ(8)((A(I,J),J=2,NCOL1),I=1,NFIL2)
      REWIND 8
C DAMOS VALOR A TODAS LAS REST. FILAS EXCEPTO LA ULTIMA
      DO 2 I=1,NFIL2
        INFIL2=I+NFIL2
        DO 20 J=2,NCOL
          A(INFIL2,J)=-A(I,J)
20     CONTINUE
2     CONTINUE
C SE LEE LA ULT. COLUMNA (TERM. INDEPENDIENTES)
      READ(1,200)(A(I,NCOL),I=1,NFIL2)
      DO 4 I=1,NFIL2
        A(I,NCOL)=-A(I,NCOL)
4     A(I+NFIL2,NCOL)=-A(I,NCOL)

```

```

C  ULTIMA FILA
   DO 3 J=1,NCCL1
     A(NFIL,J)=0.0
3  CONTINUE
   A(NFIL,NCGL)=1.0
   RETURN
   END

BKEND

```

APENDICE B

SOBRE EL CALCULO DE LA ENERGIA DE FORMACION DE VACANTES EN LA ESTRUCTU RA IONICA DEL ClNa.

En el Capítulo 6, se proponía un mecanismo físico de disipación de energía sísmica que consistía en el aumento en el número de defectos puntuales de un cristal, inducido por la onda sísmica. En este apéndice se va a considerar el caso especial de la creación de vacantes en un cristal iónico de ClNa.

No se pretende ofrecer un método riguroso de cálculo, sino presentar el problema y esbozar su solución de modo comprensible al especialista en Sismología que no esté familiarizado con temas como éste de Física del Estado Sólido.

La elección de la estructura del ClNa se realiza por dos motivos fundamentales; uno simplicidad y lo bien estudiada que está; otro, es que la mayor parte de los investigadores de la composición de la Tierra, proponen un Manto formado fundamentalmente por apuestos de marcado carácter iónico (Coulomb, 1976; Sammis, 1972), como son diversos óxidos y silicatos.

En un sólido iónico, a efectos de neutralidad de carga, las vacantes suelen formarse por pares de signo contrario, éstos son los llamados defectos de Schottky.

El modo más directo de enfocar el problema es escribir la densidad de energía potencial para un cristal iónico, en la aproximación de dos cuerpos puede escribirse (Sammis, 1972) como: ⁽¹⁾

$$W(V) = N_A \left[-\frac{\alpha q^2}{r} + \sum_i \sum_j V_{ij}^{(r)} \right] \quad (B-1)$$

(cations) (anions)
malla red
potencial

(1) Las limitaciones de ésta formulación basada en el potencial de Bom-Mayer, aparecen en el Capítulo 38 de Coulomb (1976)

en la que no se han tenido en cuenta interacciones de Van der Waals entre vecinos mas próximos e interacciones anión-anión entre segundos vecinos, y donde N_A es el número de Avogadro y α la constante de Madelung. Esta ecuación está en buen acuerdo con las energías de la red calculadas experimentalmente (ciclo de Born-Haber).

La interacción Coulumbiana de largo alcance es:

$$\phi_{ij}^c = \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (B-2)$$

y la interacción repulsiva catión-anión es de la forma

$$V_{ij}^{(r)} = \lambda_{ij} e^{-r_{ij}/\rho_{ij}} \quad (B-3)$$

Como se vió en el capítulo 6, la densidad de defectos de Schottky puede expresarse por:

$$\frac{n}{N} = C \exp\left(\frac{-\phi_s}{2kT}\right) \quad (B-4)$$

El cálculo de la energía de formación, tal como se indicó entonces, es complicado, a continuación se realiza un cálculo simplificado que conduce a valores de ϕ_s para dicha estructura cúbica centrada en las caras. Para ello se sigue en principio la línea de razonamiento de Dekker (1957) - capítulo 7 - .

De acuerdo con (B-4), el número de vacantes en equilibrio térmico y a temperatura T está determinado de modo esencial por la energía de formación $\phi_s = \phi_+ + \phi_-$. Veamos primero la energía de formación de la vacante de un ión positivo, ϕ_+ . Con los argumentos de Jost que sirven para calcular la energía de disolución de un ión de un cristal en un solvente de constante dieléctrica ϵ , Dekker obtiene la energía ϕ_+ o ϕ_- : La remoción de un ión positivo a la superficie da lugar a una ganancia de energía:

$$\frac{1}{2} \epsilon_L = \frac{1}{2} \alpha_M \frac{e^2}{a_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (B-5)$$

Por otra parte, se produce un reajuste de iones y cargas eléctricas que rebaja ϕ_+ . El material que rodea a la vacante se polariza, estando

dada la energía de polarización por:

$$P_+ = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_+} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (B-6)$$

La energía de formación queda de este modo:

$$\phi_+ = \epsilon_L - \frac{1}{2} \epsilon_L - P_+ = \frac{1}{2} \alpha_M \frac{e^2}{a_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_+} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (B-7)$$

De la misma manera, para un ión negativo:

$$\phi_- = \frac{1}{2} \epsilon_L - \frac{1}{2} \frac{e^2}{R_-} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (B-7')$$

con lo que la energía requerida para formar un defecto de Schottky es:

$$\phi_v = \phi_+ + \phi_- = \epsilon_L - \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) \quad (B-7'')$$

El primer término o energía de ligadura, ϵ_L , puede calcularse con una buena precisión, pero el problema surge cuando se intenta asignar valores a R_+ y R_- .

Mott y Littleton (ver libro de Dekker) han realizado complejos cálculos de P_+ y P_- basados en la estructura iónica real, deduciendo de ellos los R_+ y R_- . Los resultados que obtienen para el ClNa y el ClK son los de la tabla B-1(todas las energías en eV).

TABLA B-1.

Cristal	ϵ_L	P_+	P_-	ϕ_v	R_+	R_-
ClNa	7,94	3,32	2,76	1,86	0,58a ₀	0,95a ₀
ClK	7,18	2,71	2,39	2,08	0,61a ₀	0,85a ₀

donde a₀ es el parámetro de la red.

A continuación, se estiman R_+ y R_- de modo aproximado mediante un método simplificado, pero que muestran un acuerdo aceptable con los valores de la tabla.

En la figura B-1 se muestra un ión negativo, Cl⁻, rodeado por los

seis cationes mas próximos (Na^+ o K^+). Dicha figura es, evidentemente, esquemática y en ella se han representado los "centros" de los iones. Supongamos ahora que se forma una vacante en $A'(0, -a, 0)$ y estudiemos el desplazamiento del ión que se encuentra en $C(0, 0, 0)$; éste pasará entonces a $C'(0, \Delta y, 0)$, ya que por consideraciones de simetría es claro que, en primera aproximación, sólo se desplazará según el eje Y (ver la figura B-2).

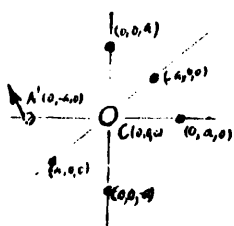


Figura B-1

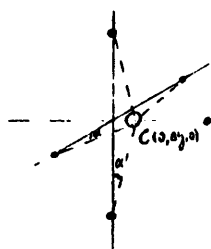


Figura B-2

La posición de equilibrio de C vendrá dada por:

$$\sum_i f_i(C) = 0 \quad ; \quad f_i = \frac{dw}{dr_i}$$

teniendo en cuenta el sentido de las fuerzas f_i y la expresión (B-1) ⁽¹⁾:

$$\frac{|q_a q_c|}{(r - \Delta y)^2} - \frac{1}{\rho} e^{-(r - \Delta y)/\rho} - 4 \frac{|q_a q_c|}{(r^2 + \Delta y^2)^{3/2}} \frac{\Delta y}{\sqrt{r^2 + \Delta y^2}} + 4 \frac{1}{\rho} e^{-(r^2 + \Delta y^2)^{1/2}} \frac{\Delta y}{\sqrt{r^2 + \Delta y^2}} = 0 \quad (B-8)$$

considerando los siguientes desarrollos en serie de potencias, para $x = \Delta y/r \ll 1$ y despreciando los términos de orden dos y superiores en x ya que las aproximaciones del modelo físico no justifican operar con mas de una cifra decimal (no se considera relajación en los cationes),

$$\frac{1}{(r - \Delta y)^2} = \frac{1/r^2}{(1 - x)^2} \approx \frac{1}{r^2} (1 + 2x + \dots)$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{r^2 + \Delta y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \approx x (1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots)$$

(1) q_a : carga del anión, q_c : carga del catión.

$$e^{-(r-0.9)/\rho} = e^{-r/\rho} (e^{-x})^{-r/\rho} \approx e^{-r/\rho} [1-x \dots]^{-r/\rho} \approx e^{-r/\rho} [1 + \frac{r}{\rho} x \dots]$$

$$e^{-(\frac{r^2 + 0.9^2}{\rho^2})^{1/2}} = e^{-r/\rho (1+x')^{1/2}} \approx e^{-r/\rho (1 + \frac{1}{2} x')} \approx e^{-r/\rho} [1 - \frac{r}{\rho} \frac{x'}{2} \dots] \quad (B-8')$$

substituyendo estos desarrollos en (B-8) se llega a:

$$-\left[\frac{2 |q_a q_c|}{r^2} + \frac{\lambda}{\rho} e^{-r/\rho} \left(\frac{r}{\rho} - 4 \right) \right] x + \left[\frac{|q_a q_c|}{r^2} - \frac{\lambda}{\rho} e^{-r/\rho} \right] = 0 \quad (B-9)$$

cuya solución es:

$$x = \frac{\frac{|q_a q_c|}{r^2} - \frac{\lambda}{\rho} e^{-r/\rho}}{\frac{2 |q_a q_c|}{r^2} + \frac{\lambda}{\rho} e^{-r/\rho} \left(\frac{r}{\rho} - 4 \right)} \quad (B-10)$$

En su deducción debemos recordar que se han considerado únicamente interacciones entre los vecinos mas próximos al ión situado en C (0,0,0) y que a causa de la formación de una vacante en A'(0,-r,0); no obstante, respecto de la vacante, estamos considerando primeros vecinos - puntos C y sus cinco equivalentes respecto de A'-y segundos vecinos que son los primeros vecinos de los puntos C.

Resolvamos (B-10) para las estructuras mencionadas en la tabla B-1 del ClNa y del ClK.

1. Para el ClNa, y con datos de Kittel (1968)¹⁰, Cap. 3

$$a = 2,82 \text{ \AA} = 2,82 \cdot 10^{-8} \text{ cm} ; q^2/a^2 = 2,897 \cdot 10^{-4} \text{ erg.cm}^{-1}$$

$$\lambda = 1,05/6 = 0,175 \cdot 10^{-8} \text{ erg} ; \lambda/\rho = 0,545 \text{ erg.cm}^{-1}$$

$$\rho = 0,321 \cdot 10^{-8} \text{ cm} ; a/\rho = 8,785$$

resulta la solución: $x = 0,211$, pero los dos últimos dígitos están afectados de error, por lo que $x_{\text{ClNa}} = 0,2 \pm 0,05$.

El radio de la vacante catiónica R_+ será el del catión R_0 mas el desplazamiento del anión adyacente Δy :

$$R_+ = R_0 + \Delta y$$

de modo análogo

$$R_- = R_0 + \Delta y$$

como: $R_{Na^+} = 0,98\text{\AA} = 0,35a$; $R_{Cl^-} = 1,81\text{\AA} = 0,65a$ y $\Delta y = (0,2 \pm 0,05)a$
 queda finalmente

$$\begin{aligned} R_+ &= (0,55 \pm 0,05) a_{ClNa} \\ R_- &= (0,85 \pm 0,05) a_{ClNa} \end{aligned} \quad (B-11)$$

2.- Para el ClK

$$\begin{aligned} a &= 3,147 \text{\AA} \quad ; \quad q^2/a^2 = 2,326 \cdot 10^{-4} \text{ erg.cm}^{-1} \\ \lambda &= 0,342 \cdot 10^{-8} \text{ erg} \quad ; \quad \lambda/\rho = 1,048 \text{ erg.cm}^{-1} \\ \rho &= 0,326 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad ; \quad a/\rho = 9,653 \end{aligned}$$

La solución de (B-9) es ahora $x = 0,200$, que teniendo en cuenta que tratamos con un sólo dígito se convierte en:

$$\begin{aligned} x_{ClK} &= 0,2 \pm 0,05 \\ \text{como: } R_{Cl} &= 0,78 a_{ClK} \quad ; \quad R_K = 0,42 a_{ClK} \quad \text{y} \quad y = (0,2 \pm 0,05) a_{ClK} , \\ \text{resulta:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_+ &= (0,62 \pm 0,05) a_{ClK} \\ R_- &= (0,78 \pm 0,05) a_{ClK} \end{aligned} \quad (B-12)$$

En la tabla B-2, puede comprobarse el acuerdo entre estos valores(a) y los de Mott y Littleton(b).

TABLA B-2

Cristal	$R_+(a)$	$R_-(a)$	$R_+(b)$	$R_-(b)$
ClNa	$0,55a_0$	$0,85a_0$	$0,58a_0$	$0,95a_0$
ClK	$0,62a_0$	$0,78a_0$	$0,61a_0$	$0,85a_0$

Se puede comprobar que la desviación máxima en los valores de R_+ y R_- respecto a cálculos mas precisos es del orden del 10% , lo que cae dentro de las limitaciones del modelo. Consecuentemente, las energías de formación de vacantes en estas estructuras, calculadas mediante (B-11) y (B-12), manifiestan esas desviaciones de los valores de ϕ_v .

de la tabla B-1 .

Una vez se tiene un método simplificado de cálculo de ϕ_v , el intentar determinar cómo variarán dichas energías, cuando sobre el cristal actúa una perturbación periódica, es un problema muy complejo, aun en una estructura tan simple como la del ClNa. Una aproximación interesante al tema es la realizada por Girifalco y Welch (1967) en el caso de un metal (Cobre), sometido a un campo de deformaciones constante. La generalización del procedimiento de estos autores a campos de deformaciones lentamente variables y a sólidos de carácter iónico, puede ser el camino mas simple para conseguir un tratamiento mas riguroso del problema estudiado en el capítulo 6.

B I B L I O G R A F I A

- AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS HANDBOOK, 1972. Cap. 9 : Properties of Ionic Crystals. McGraw-Hill, New York.
- ANDERSON, D.L., 1967. The anelasticity of the Mantle. Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 14, 135.
- ANDERSON, D.L. y C.B. ARCHAMBEAU, 1964. The anelasticity of the Earth. J. Geophys. Res., 69, 2071.
- ANDERSON, D.L., A. BEN-MENNAHEM y C.B. ARCHAMBEAU, 1965. Attenuation of seismic energy in the Upper Mantle. J. Geophys. Res., 70, 1441.
- ANDERSON, D.L. y R.S. HART, 1978. Q of the Earth. J. Geophys. Res., 83, 5869.
- ANDERSON, D.L. y R.L. KOVACH, 1964. Attenuation in the Mantle and rigidity of the Core from multiply reflected Core phases. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 51, 168.
- BERZON, I.S., I.P. PASSECHNIK y A.M. POLIKARPOV, 1974. The determination of P-waves attenuation values in the Earth's mantle. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 39, 603.
- BOLT, B.A. y R. UHRHAMMER, 1975. Resolution techniques for density and heterogeneity in the Earth. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 42, 419.
- BORN, M. y K. HUANG, 1954. Dynamical theory of crystal lattices. Oxford University Press.
- BROPHY, J.H., R.M. ROSE y J. WULF, 1968. Ciencia de los materiales: Propiedades termodinámicas. Limusa-Wiley, Mexico.
- BULLEN, K.E., 1963. An introduction to the theory of Seismology. Cambridge University Press.

- CONTE, S.D. y C. DE BOOR, 1972. Elementary numerical analysis: an algorithmic approach. McGraw-Hill, New York.
- COOLIN, J.W. y J.W. TUKEY, 1965. An algorithm for the machines calculation of complex Fourier series. Math. of Comput., 19, 279.
- COULOMB, J. y G. JOBERT, 1976. Traité of Geophysique interne. Cap. 38, par L. THOMSEN: Structure et constitution du Manteau et Noyau. Masson et Cie, Paris.
- DEKKER, A.J., 1957. Solid State Physics. MacMillan & Co., New York.
- ELLIOT, R.J. y A.F. GIBSON, 1974. Solid State Physics. MacMillan & Co., New York.
- FRIEDEL, J., 1960. Sur les interactions entre les joints et les impuretés, 4^e Colloque de Metallurgie, Saclay. Presses Universitaires de France. Paris.
- FRIEDEL, J., 1964. Dislocations. Addison-Wesley, Mass.
- GEOLOGICAL SOCIETY OF AMERICA, 1966. Handbook of physical constants. Ed: S.P. Clark.
- GIRIFALCO, L.A. y D.O. WELCH, 1967. Point defects and diffusion in strained metals. Gordon and Breach Publ. New York.
- GORDON, R.B., 1967. Thermally activated processes in the Earth. Geophys. J. Roy. Astrn. Soc., 14, 33.
- GRANATO, A. y K. LUCKE, 1956. Theory of mechanical damping due to Dislocations. Journ. Appl. Phys., 27, 583.
- HAYDEN, H.W., W.G. MOFFAT y J. WULF, 1968. Ciencia de los materiales: Propiedades mecánicas. Limusa-Wiley, México.
- HILDEBRAND, F.B., 1956. Introduction to numerical analysis. McGraw-Hill. New York.

- HOWELL, B.F., 1963. Absorption of seismic waves. University of Michigan
- ISACKS, B. y M. BARANGI, 1971. Lateral variations of seismic wave attenuation. J. Geophys. Res., 76, 8493.
- JACKSON, D. y D.L. ANDERSON, 1970. Physical mechanisms of seismic wave attenuation. Rev. Geophys. Space Phys., 8, 1.
- KANAMORI, H., 1967. Spectrum of short-period core phases in relation to the attenuation in the Mantle. J. Geophys. Res., 72, 2181.
- KE, T.S., 1947. Experimental evidence of the viscous behavior of grain boundary in metals. Phys. Rev., 71, 533.
- KITTEL, C., 1968. Introduction to Solid State Physics. John Wiley & Sons
- KNOPOFF, L., 1956. The seismic pulse in materials possessing solid friction, I: Plane waves. Bull. Seism. Soc. Amer., 46, 175.
- KNOPOFF, L., 1969. Attenuation of seismic waves in the Mantle. The Earth's Crust and the Upper Mantle, 273. Ed. P.J. Hart, Amer. Geoph. Un. Monograph 13.
- KNOPOFF, L. y G.J.F. McDONALD, 1960. Models for acoustic loss in solids. J. Geophys. Res., 65, 2191.
- KURITA, T., 1967. Attenuation of long period P waves and Q in the Mantle. J. Phys. Earth, 14, 1.
- LANDAU, L.D. y E.M. LIFSHITZ, 1969. Física Estadística. Reverté.
- LANDAU, L.D. y E.M. LIFSHITZ, 1969. Teoría de la Elasticidad. Reverté.
- LOVE, A.E.H., 1944. A treatise on the mathematical theory of Elasticity. Dover Pub.
- MAGNITISKY, V.A. y V.N. ZARKOV, 1969. Low velocity layers in the Upper Mantle. The Earth's Crust and the Upper Mantle, 664. Ed. P.J. Hart, Am. Geoph. Un. Monograph 13.

- MASON, W.P., 1969. Internal friction mechanism that produces an attenuation in the Earth's Crust proportional to the frequency. J. Geophys. Res., 74, 4963.
- MCGINLEY, J. y D.L. ANDERSON, 1969. Relative amplitudes of P and S waves as a Mantle reconnaissance tool. Bull. Seism. Soc. Amer., 59, 1189.
- McQUEEN, R.G., S.P. MARSH y J.N. FRITZ, 1967. Hugoniot equation of state of twelve rocks. J. Geophys. Res., 72, 4999.
- MIKUMO, T. y T. KURITA, 1968. Q-Distribution for long-period P waves in the Mantle. J. Phys. Earth, 16, 11.
- MOFFAT, W., G.W. PEARSALL y J. WULF, 1968. Ciencia de los materiales: Estructura. Limusa-Wiley.
- NATCHRIEB, N.H., J. PETIT y J. WEHNRENBURG, 1957. Self diffusion of silver in silver-palladium alloys. J. Chem. Phys., 26, 106.
- NIBLETT, D.H. y J. WILKS, 1960. Dislocations damping in metals. Advanc. Phys., 9 (33), 1.
- NYE, J.F., 1957. Physical properties of crystals: their representation by tensor and matrices. Oxford.
- OROWAN, E., 1967. Seismic damping and creep in the Mantle. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 14, 191.
- PARKER, R.L., 1977. Understanding the inverse theory. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 5, 35.
- PRESS, F., 1964. Seismic wave attenuation in the Crust. J. Geophys. Res., 69, 4417.
- RINGWOOD, A.E., 1962. A model for the Upper Mantle. J. Geophys. Res., 67, 857 y 4473.

- RINGWOOD, A.E. y D.H. GREEN, 1969. Phase transitions. The Earth's Crust and the Upper Mantle. Ed. P.H. Hart. Amer. Geoph. Un. Monograph 13.
- ROBERTSON, E.C., 1972. The nature of solid Earth. McGraw-Hill.
- SAILOR, S.L. y A. DZIEWONSKI, 1978. Measurements and interpretation of normal mode attenuation. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 53, 559.
- SAMMIS, C., 1972. Lattice dynamics of MgO , Al_2MgO_2 and Mg_2SiO_4 spinel. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 29, 15.
- SATO, R., 1967. Attenuation of seismic waves (Review). J. Phys. Earth, 15, 32.
- SATO, R. y A.F. ESPINOSA, 1967. Dissipation in Earth's mantle and rigidity in the Earth's core determined from waves multiply reflected from the Mantle-Core boundary. Bull. Seism. Soc. Amer., 57, 829.
- SMITH, S.W., 1972. The anelasticity of the Mantle. The Upper Mantle, Tectonophysics, 13, 601. Ed. A.R. Ritsema.
- STACEY, F.D., 1969. Physics of the Earth. John Wiley & Sons.
- TENG, T.L., 1968. Attenuation of body waves and the Q structure of the Mantle. J. Geophys. Res., 73, 2195.
- TENG, T.L. y A. BEN-MENAHEN, 1965. Mechanism of deep earthquakes from spectrum of isolated body wave signals. J. Geophys. Res., 70, 5157.
- UDIAS, A., 1969. Introducción al análisis numérico. Pub. Instituto Geográfico y Catastral, Madrid.
- VAN BUEREN, H.G., 1961. Imperfections in Crystals. North Holland Pub. Amsterdam.

- WALSH, J.B., 1968. Attenuation in partial melted material. J. Geophys. Res., 73, 2209.
- WALSH, J.B., 1969. A new analysis of attenuation in partially melted rock. J. Geophys. Res., 74, 4333.
- WERT, C.A. y R.M. THOMSON, 1969. Física de los Sólidos. Ed. Castillo.
- WILDE, D.J. y C.S. BEIGHTLER, 1967. Foundations of Optimization. Prentice-Hall.
- ZARKOV, V.N. y V.A. KALININ, 1969. Equation of state at high pressure. The Earth's Crust and the Upper Mantle. Ed: P.J. Hart, Am. Geoph. Un., Monograph 13.
- ZENER, C., 1948. Elasticity and Anelasticity of metals. University of Chicago Press.
- ZIMAN, J.M., 1960. Electrons and Phonons. Oxford.

